

7. FOLGE, 1959, BAND 5, HEFT 1-2

QC

1

A613

UNIVERSITY  
OF MICHIGAN

JAN 26 1960

PHYSICS  
LIBRARY

# ANNALEN DER P H Y S I K

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,  
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 460. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,  
M. v. LAUE, W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL,  
R. ROMPE, R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN  
Heidelberg

G. RICHTER  
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionschluß am 31. Oktober 1959

## Inhalt

H.-G. Schöpf, Greifswald: Zum Problem der Energie des Gravitationsfeldes .....	1
R. Seiwert und W. Ermisch, Berlin-Adlershof: Berechnung des Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz beim Auftreten der Strahlungsdiffusion. I. Mit 3 Abbildungen .....	4
R. Seiwert und W. Ermisch, Berlin-Adlershof: Berechnung des Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz beim Auftreten der Strahlungsdiffusion. II. Mit 7 Abbildungen .....	15
C. Bojarski und A. Kowski, Gdańsk (Polen): Über die Bestimmung des kritischen Molekülabstandes bei der Konzentrationsdepolarisation der Fluoreszenz .....	31
W. R. G. Kemp, P. G. Klemens and R. J. Tainsh, Sydney (Australia): Thermal and Electrical Conductivities of Rhodium and Iron. With 5 Figures ....	35
A. A. Sokolov and Yu. M. Loskutov, Moscow: Contribution to the Theory of Bosons and Fermions with Oriented Spins. With 4 Figures .....	42
H. Singh and R. S. Seth, Chandigarh (India): Sound Velocities in Binary Liquid Mixtures. With 5 Figures .....	53
Ch. Greiner, Jena: Untersuchungen über die Umkehr der Spinvektoren in geladenen $180^\circ$ -Blochwänden. Mit 5 Abbildungen .....	57
J. Pachner, Prag: Die unitäre Feldtheorie der Schwere und Elektrizität .....	70
R. Siegel, Zwickau: Der Einfluß von Ultraschall auf das Kriechen von Kupferfedern. Mit 3 Abbildungen .....	107

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,

Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— zuzüglich Postgebühren (U. S. \$ 8.57 einschließlich Porto).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

# ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE \* BAND 5, HEFT 1-2 \* 1959

## Zum Problem der Energie des Gravitationsfeldes

Von Hans-Georg Schöpf

### Inhaltsübersicht

Für ein spezielles Feld von Gravitationswellen wird ohne Benutzung eines speziellen Ansatzes für den Affintensor  $t_{\mu}^{\nu}$  gezeigt, daß keine Gravitationsenergie vorhanden ist.

§ 1. Eine für die allgemeine Relativitätstheorie wichtige, aber bis heute noch nicht endgültig geklärte Frage ist die, ob dem Gravitationsfeld eine eindeutig bestimmte eigene Energieart entspricht. Diese Frage ist eng mit dem in letzter Zeit besonders intensiv diskutierten Problem der Gravitationsstrahlung verknüpft. Bekanntlich wird die Gesamtenergie  $E$  eines Systems formal durch den Ausdruck

$$E = \int (\mathfrak{Z}_4^4 + t_4^4) d^3x \quad (1)$$

gegeben. Hierbei bezieht sich der erste Term des Integranden auf die Energie der felderzeugenden Materie, der zweite auf diejenige des Gravitationsfeldes selbst. Unsere Frage läuft also darauf hinaus, ob dieser zweite Term einen physikalisch sinnvollen Anteil zum Integral liefert.

Die Beantwortung dieser Frage wird durch zwei Faktoren erschwert. Erstens ist  $t_{\mu}^{\nu}$  keine Tensordichte, sondern eine sogenannte Affindichte, die insbesondere durch geeignete Koordinatentransformation lokal zum Verschwinden gebracht werden kann. Zweitens ist die Konstruktion dieser Affindichte nicht zwangsläufig durch die Theorie vorgezeichnet. Von den verschiedenen möglichen Konstruktionen erwähnen wir die ursprüngliche von Einstein<sup>1)</sup>, die von Landau und Lifschitz<sup>2)</sup> sowie die neuerdings von Möller vorgeschlagene<sup>3)</sup>.

Einige Forscher haben nun axialsymmetrische strenge Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen abgeleitet und im Verlauf der Diskussion dieser Lösungen Gründe für das Verschwinden der Energiedichte bzw. der integralen Energie des Gravitationsfeldes angegeben. Hier erwähnen wir die Arbeiten von Einstein und Rosen<sup>4)5)</sup>, Bondi<sup>6)</sup>, Bonnor<sup>7)</sup> sowie von Weber und Wheeler<sup>8)</sup>.

<sup>1)</sup> A. Einstein, Ann. Physik **49**, 759 (1916).

<sup>2)</sup> L. Landau u. E. Lifschitz, The Classical Theory of Fields, Cambridge (Mass.) 1951.

<sup>3)</sup> C. Möller, Annals of Physics **4**, 347 (1958) und in Max-Planck-Festschrift, Berlin 1958.

<sup>4)</sup> A. Einstein u. N. Rosen, J. Franklin Inst. **223**, 43 (1937).

<sup>5)</sup> N. Rosen, Bull. Res. Coun. Israel **3**, 328 (1954).

<sup>6)</sup> H. Bondi, Nature **179**, 1072 (1957).

<sup>7)</sup> W. B. Bonnor, J. Math. Mech. **6**, 203 (1957).

<sup>8)</sup> J. Weber u. J. A. Wheeler, Rev. mod. Physics **29**, 509 (1957).

Ein sich ins Unendliche erstreckendes zylindrisches Gebilde, wie es die soeben erwähnten Lösungen beschreiben, ist allerdings insofern unphysikalisch, als es im allgemeinen ein System unendlicher Gesamtenergie darstellt. Man ist jedoch berechtigt, eine derartige Lösung als gute Näherung für das Gravitationsfeld eines Torus in seiner nächsten Umgebung anzusehen, wenn der Radius dieses Torus sehr viel größer als sein Querschnittsradius ist. Eine solche Approximation eines Torus durch einen unendlich langen Zylinder wird ja auch bei der Behandlung entsprechender Probleme der Maxwell'schen Theorie erfolgreich verwendet. In diesem Sinne ist auch die Benutzung einer speziellen axialsymmetrischen Lösung in den folgenden Darlegungen zu verstehen.

Wir werden eine solche Lösung einer Arbeit von Marder entnehmen<sup>9)</sup>. Sodann werden wir Argumente angeben, die die erwähnten Schlüsse über das Verschwinden der Gravitationsenergie bei axialsymmetrischen Feldern bekräftigen. Im Unterschied zu den zitierten Autoren argumentieren wir aber nicht mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Affindichte  $t_\mu^\nu$ . Vielmehr bleibt deren analytische Form unberücksichtigt. Es ist klar, daß ein solches Verfahren in Anbetracht der erwähnten, bezüglich der Größe  $t_\mu^\nu$  auftretenden Schwierigkeiten vorteilhaft ist.

§ 2. Wir erläutern zunächst die unseren Betrachtungen zugrunde liegende Lösung der Feldgleichungen. Es handelt sich um ein Linienelement der Form

$$ds^2 = e^{2\gamma-2\psi} (dt^2 - dr^2) - r^2 e^{-2\psi} d\Phi^2 - e^{2\psi+2\mu} dz^2, \quad (2)$$

wobei  $\psi$ ,  $\gamma$  und  $\mu$  Funktionen von  $r$  und  $t$  allein sind. Wie Rosen gezeigt hat<sup>5)</sup>, können die Vakuumfeldgleichungen durch folgende Funktionen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \\ \psi &= A J_0(\omega r) \cos \omega t, \\ \gamma &= \frac{1}{2} A^2 \omega r J_0(\omega r) J_0'(\omega r) \cos 2\omega t + \frac{1}{2} A^2 \omega^2 r^2 \{J_0'^2(\omega r) - J_0(\omega r) J_0''(\omega r)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} A^2 \omega^2 R^2 J_0'^2(\omega R). \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei ist  $J_0$  die Besselfunktion nullter Ordnung, der Strich bedeutet die Ableitung nach dem Argument, während  $A$ ,  $\omega$ ,  $R$  Konstanten sind.

Wählt man jetzt  $R$  und  $\omega$  derart, daß

$$J_0(\omega R) = 0$$

ist, so verschwindet an der Oberfläche des Zylinders  $r = R$  außer  $\mu$  auch  $\psi$  und  $\gamma$ . Das Verschwinden dieser Größen ist aber für die pseudoeuklidische Metrik kennzeichnend. Wir können daher die angegebene Lösung im Bereich  $0 \leq r \leq R$  verwenden, und für  $R < r$  die Minkowskische Metrik in Zylinderkoordinaten stetig anschließen. Ersichtlich erleiden dabei die ersten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  nach  $r$  auf der Zylinderoberfläche einen endlichen Sprung, so daß die zweiten Ableitungen dort eine  $\delta$ -artige Singularität haben. Physikalisch bedeutet das ein Vorhandensein einer flächenhaften Verteilung von  $T_\mu^\nu$  auf dem Zylinder  $r = R$ .

<sup>9)</sup> L. Marder, Proc. Roy. Soc. London (A) **246**, 133 (1958).



Wir haben also außerhalb des Zylinders  $r = R$  pseudoeuklidische Metrik. Im Innern dieses Zylinders befindet sich ein nichtfortzutransformierendes Gravitationsfeld. Es ist überall regulär und ist als Feld stehender Gravitationswellen mit ortsabhängiger Amplitude zu interpretieren.  $T_\mu^\nu$  verschwindet nur auf der Zylinderoberfläche nicht. Wie aus der Arbeit von Marder ersichtlich ist, verschwindet aber  $T_4^4$  in unserem Fall auch an dieser Stelle. Es gilt also im ganzen Raum  $T_4^4 = 0$ .

§ 3. Die Gesamtenergie  $E$  wird im allgemeinen aus dem Verhalten von Probeteilchen in großer Entfernung von dem betrachteten System bestimmt. Da in dem oben konstruierten Feld die Metrik im gesamten Außenraum pseudoeuklidisch ist, führt ein solches Teilchen die speziell-relativistische Bewegung eines freien Massenpunkts aus. Daraus schließen wir, daß die Gesamtenergie  $E$  verschwindet.

Ferner verschwindet in unserem Fall wegen  $T_4^4 = 0$  auch der erste Term im Integranden von (1). Diese Beziehung ist zwar nicht invariant. Durch die Forderung der Zeitunabhängigkeit außerhalb des Zylinders erscheint jedoch eine Zeitrichtung als physikalisch ausgezeichnet. Solange wir diese Auszeichnung nicht zerstören, gilt die erwähnte Beziehung.

Haben wir uns so von dem Verschwinden sowohl von dem ersten Term des Integranden in (1) als auch von  $E$  überzeugt, so haben wir damit auch das Verschwinden der Gravitationsenergie bewiesen, und zwar unabhängig von der konkreten analytischen Form von  $t_\mu^\nu$ .

Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. A. Papapetrou, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, für wertvolle Diskussionen zu lebhaftem Dank verpflichtet.

Greifswald, Institut für theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 23. Januar 1959.

# Berechnung des Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz beim Auftreten der Strahlungsdiffusion. I

Von R. Seiwert und W. Ermisch<sup>1)</sup>

Mit 3 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Wenn die Resonanzfluoreszenzstrahlung innerhalb des Resonanzgefäßes reabsorbiert wird, so tritt infolge der richtungsabhängigen Ausstrahlung und Absorption des  $\pi$ - und  $\sigma$ -Lichts eine Depolarisation auf. Außerdem wirkt bei anomalem Zeeman-Effekt noch depolarisierend, daß bei Anregung mit  $\pi$ - oder  $\sigma$ -Licht meistens  $\pi$ - und  $\sigma$ -Licht emittiert wird. Es werden Gleichungen zur Berechnung des Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz bei sehr schwachen Magnetfeldern (einschl.  $|\mathfrak{H}| \rightarrow 0$ ) und schwacher Reabsorption der Resonanzstrahlung abgeleitet.

## 1. Einleitung

Der Polarisationsgrad der Resonanzfluoreszenz nimmt mit wachsendem Dampfdruck ab. Diese Erkenntnis wurde bereits durch eine Anzahl experimenteller Untersuchungen — besonders an Quecksilber<sup>2)</sup> und Natrium<sup>3)</sup> — in den Jahren von 1923 bis 1934 gewonnen. Doch enthielten die Ergebnisse der Messungen für die Natrium-Resonanzfluoreszenz noch gewisse Widersprüche, besonders bezüglich der Teilchendichte, bei der eine merkliche Depolarisation der Resonanzfluoreszenz einsetzt. Neuere von den Verfassern<sup>4)</sup> durchgeführte Untersuchungen des Polarisationsgrades der Natrium-Resonanzfluoreszenz in Abhängigkeit vom Dampfdruck haben gezeigt, daß die Depolarisation tatsächlich bereits bei sehr kleinen Teilchendichten (etwa  $10^{10}$  Na-Atome pro  $\text{cm}^3$ ) beginnt. Für die Quecksilber-Resonanzfluoreszenz wurden von Rollet, Brossel und Kastler<sup>5)</sup> ebenfalls neue, aufschlußreiche Meßergebnisse publiziert.

Früher wurde allgemein die Auffassung vertreten, daß die Depolarisation der Resonanzstrahlung durch Stöße bewirkt wird, die einen Übergang zwischen einzelnen Zeeman-Niveaus zur Folge haben. Im Anschluß an ihre Messungen des Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz eines Natrium-Atomstrahls

<sup>1)</sup> II. Physikal. Institut der Humboldt-Universität zu Berlin.

<sup>2)</sup> V. v. Keussler, Physik. Z. **27**, 313 (1926); Ann. Physik **82**, 793 (1927); Z. Physik **73**, 649 (1931).

<sup>3)</sup> Eine Zusammenstellung der Meßwerte für den Polarisationsgrad der Natrium-Resonanzfluoreszenz findet sich in einer Veröffentlichung der Verfasser<sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> W. Ermisch u. R. Seiwert, Ann. Physik (7) **2**, 393 (1958); **3**, 428 (1959).

<sup>5)</sup> N. Rollet, J. Brossel u. A. Kastler, C. R. Acad. Sci. Paris **242**, 240 (1956).

haben die Verfasser<sup>6)</sup> darauf hingewiesen, daß eine Depolarisation bei sehr kleinen Teilchendichten nicht durch Stöße bewirkt sein kann, da theoretisch keine derart großen Stoßquerschnitte ( $q \sim 10^{-9} \text{ cm}^2$ ) zu erwarten sind. Rollet, Brossel und Kastler<sup>6)</sup> fanden bei ihren Experimenten, daß der Polarisationsgrad der Resonanzfluoreszenz von  $\text{Hg}^{198}$  bei kleineren Dampfdichten in stärkerem Maße abnimmt als bei natürlichem Quecksilber, und konnten das leicht erklären, indem sie die Strahlungsdiffusion als Ursache der Depolarisation ansahen; denn der Absorptionskoeffizient für die Linie  $2537 \text{ \AA}$  ist bei  $\text{Hg}^{198}$  etwa fünfmal so groß wie bei natürlichem Quecksilber. Auch die eigenen experimentellen Ergebnisse bei Einstrahlung linear polarisierten NaD-Lichts<sup>4)</sup> sprechen für die Deutung der Depolarisation durch das Auftreten der Strahlungsdiffusion. Diese Erklärung kann ebenfalls auf das Ergebnis der Messungen von Hanle<sup>7)</sup> bei Einstrahlung linkszirkular polarisierten NaD-Lichts angewandt werden. Die Folgerungen, die Hanle und Larché<sup>8)</sup> aus dem Resultat der Hanleschen Versuche gezogen haben, treffen nicht zu; darauf sind die Verfasser<sup>4)</sup> früher näher eingegangen. Messungen der Lebensdauer angeregter Zustände mit Hilfe einer Radiofrequenz-Methode, die von Guichon, Blamont und Brossel<sup>9)</sup> an Quecksilber durchgeführt worden sind, haben ebenfalls Ergebnisse geliefert, die als Argument für die Einwirkung der Strahlungsdiffusion auf den Polarisationsgrad herangezogen werden können. Die Veröffentlichung der genannten Autoren enthält auch eine Kurve für die Abhängigkeit des Polarisationsgrades von  $\text{Hg}^{202}$  von der Teilchendichte, die im wesentlichen mit der oben erwähnten Meßkurve für  $\text{Hg}^{198}$  übereinstimmt.

An dem Auftreten der depolarisierenden Stöße soll keineswegs gezweifelt werden; doch dürften sie erst bei höheren Teilchendichten einen merklichen Einfluß auf den Polarisationsgrad gewinnen. Ihnen ist die Depolarisation der Resonanzfluoreszenz beim Zusatz eines Fremdgases zuzuschreiben. In diesen Fällen wird der Druck des Grundgases genügend klein und konstant gehalten. Die Abnahme des Polarisationsgrades tritt dann aber erst bei viel höheren Drucken des Fremdgases auf, wie Messungen von Hanle<sup>7)</sup> gezeigt haben. Es ist nicht zu erwarten, daß die Querschnitte für depolarisierende Stöße mit artgleichen Atomen um mehrere Zehnerpotenzen größer sind als die für Stöße mit Fremdgasatomen.

Es sollen jetzt Gleichungen zur Berechnung des Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz beim Auftreten der Strahlungsdiffusion abgeleitet werden. Auf Grund dieser Gleichungen können dann in einer weiteren Arbeit<sup>10)</sup> (Teil II) Werte für den Polarisationsgrad der Quecksilber- und Natrium-Resonanzfluoreszenz ermittelt und mit dem experimentellen Befund verglichen werden.

Zunächst müssen zwei Arten der Depolarisation unterschieden werden.

1. Die richtungsabhängige Ausstrahlung und Absorption des  $\pi$ - und  $\sigma$ -Lichts bewirkt eine Depolarisation der Resonanzfluoreszenz, die weiterhin kurz als „Richtungsdepolarisation“ bezeichnet werden soll.
2. Bei der Reemission tritt

<sup>6)</sup> W. Ermisch u. R. Seiwert, Exp. Techn. Physik **3** (1955), Sonderheft „Spektroskopie“, S. 52 ff.

<sup>7)</sup> W. Hanle, Z. Physik **41**, 164 (1927).

<sup>8)</sup> W. Hanle u. K. Larché, Z. Physik **85**, 548 (1933).

<sup>9)</sup> M. A. Guichon, J. E. Blamont u. J. Brossel, C. R. Acad. Sci. Paris **243**, 1859 (1956); J. Physique Radium **18**, 99 (1957).

<sup>10)</sup> R. Seiwert u. W. Ermisch, Ann. Physik (7) **5**, 15 (1959).

eine Depolarisation auf, die dadurch bedingt ist, daß bei Anregung mit  $\pi$ -Licht oder mit  $\sigma$ -Licht beim anomalen Zeeman-Effekt meistens  $\pi$ - und  $\sigma$ -Strahlung emittiert wird. Diese Art der Depolarisation wird als „Reemissionsdepolarisation“ bezeichnet. Bei einer Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld in ein Triplett tritt nur die Richtungsdepolarisation auf. Sonst rufen beide Arten der Depolarisation zusammen die Abnahme des Polarisationsgrades hervor.

## 2. Richtungsdepolarisation

Zuerst soll auf die Richtungsdepolarisation eingegangen werden. Dieser Effekt soll für den Fall erörtert werden, daß die Spektrallinie beim Anlegen eines Magnetfeldes in ein Triplett aufspaltet. (Dabei ist für die weiteren Rechnungen gleichgültig, ob der Landésche Aufspaltungsfaktor gleich 1 ist [normaler Zeeman-Effekt] oder nicht.) Die Polarisation der beiden seitlichen Komponenten ist so, als würden sie von Rotatoren mit entgegengesetztem Umlaufsinn emittiert, die der mittleren Komponente, als würde sie von einem Oszillator ausgestrahlt.

Um die Strahlungsdiffusion bei der Berechnung des Polarisationsgrades zu berücksichtigen, muß man von ähnlichen Überlegungen wie unter der Voraussetzung isotroper Ausstrahlung<sup>11)</sup> ausgehen. Damit später der Aufwand an numerischer Rechnung in erträglichen Grenzen bleibt, ist die Beschränkung auf die Fälle schwacher Reabsorption der Resonanzstrahlung und kleiner Magnetfeldstärken notwendig. Zunächst muß jetzt jedoch die richtungsabhängige Emission und Absorption der Oszillatoren und Rotatoren betrachtet werden<sup>12)</sup>. Diese seien durch ein Magnetfeld ausgerichtet.

Wenn  $|\vec{\mathcal{S}}| \rightarrow 0$  geht, so ändert sich dabei nach Heisenberg<sup>15)</sup> die Polarisation der (von ihm überhaupt nur betrachteten primären) Resonanzfluoreszenz nicht, sofern das Magnetfeld bei Anregung mit linear polarisiertem Licht parallel zu dessen elektrischem Vektor und bei Anregung mit zirkular polarisiertem oder unpolarisiertem Licht parallel zu dessen Fortpflanzungsrichtung orientiert ist. Unter diesen Bedingungen bleibt der Polarisationsgrad für  $|\vec{\mathcal{S}}| \rightarrow 0$  auch beim Auftreten der Strahlungsdiffusion erhalten, wie sich zeigen läßt.

Die Strahlungsstärke eines Oszillators (Abb. 1) hängt in folgender Weise von dem Winkel  $\vartheta$  zwischen der Schwingungsrichtung des Oszillators und der Ausstrahlungsrichtung ab:

$$I^d(\vartheta) = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta. \quad (1)$$

<sup>11)</sup> R. Seiwert, *Optik* **15**, 758 (1958).

<sup>12)</sup> Die Absorption und die Emission der Resonanzstrahlung dürfen nach Weisskopf<sup>13)</sup> nicht als zwei voneinander unabhängige Prozesse aufgefaßt werden. Bei der Berechnung der Polarisation der Resonanzfluoreszenz kann man aber von der von Hanle<sup>14)</sup> hierfür verwendeten Vorstellung ausgehen, daß auf die Absorption der Resonanzstrahlung eine spontane Emission folgt.

<sup>13)</sup> V. Weisskopf, *Ann. Physik* **9**, 23 (1931).

<sup>14)</sup> W. Hanle, *Z. Physik* **30**, 93 (1924), *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **4**, 214 (1925).

<sup>15)</sup> W. Heisenberg, *Z. Physik* **31**, 617 (1925). Während Heisenberg die Regel zur Polarisation der Resonanzstrahlung korrespondenzmäßig abgeleitet hat, konnte sie später von V. Weisskopf<sup>13)</sup> auf Grund der Diracschen Theorie der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie bestätigt werden.

Für einen Rotator (Abb. 1) gilt:

$$I^r(\vartheta) = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \vartheta). \quad (2)$$

Durch den Normierungsfaktor wird in beiden Fällen erreicht, daß die gesamte Strahlungsleistung  $\Phi$  des Oszillators bzw. des Rotators gleich 1 ist.

Die von dem Oszillator in der Richtung  $\vartheta$  emittierte linear polarisierte Welle<sup>16)</sup> läßt sich folgendermaßen charakterisieren (Abb. 2):

$$E_{\eta}^d = \frac{E^a}{\varrho} \sin \vartheta \cos \omega \left( t - \frac{\varrho}{c} \right). \quad (3)$$

Die Amplituden, die sich bei der Zerlegung der Welle im Hinblick darauf ergeben, welche Anteile zur Anregung der Oszillatoren und der Rotatoren dienen können, sind aus dem folgenden Schema zu ersehen:

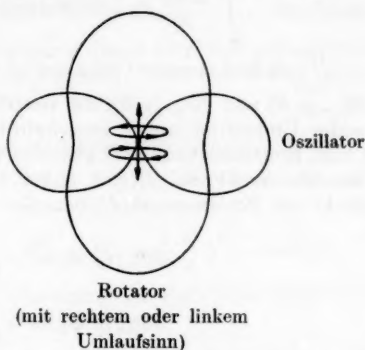


Abb. 1. Strahlungscharakteristik von Oszillator und Rotator

$$\bar{E}_z^d = \frac{E^a}{\varrho} \sin^2 \vartheta \quad (\text{Anregung der Oszillatoren})$$

$\bar{E}_{\eta}^d$

$$\bar{E}_y^d = \frac{E^a}{\varrho} \sin \vartheta \cos \vartheta \rightarrow 2 \text{ entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen mit der Amplitude der einzelnen Komponenten}$$

$$\bar{E}_x^d = \bar{E}_y^d = \frac{1}{2} \frac{E^a}{\varrho} \sin \vartheta \cos \vartheta$$

(Anregung der Rotatoren beider Umlaufrichtungen).

Die Strahlungsleistung, die von einem Oszillator mit  $\Phi = 1$  in der Richtung  $\vartheta$  in den räumlichen Winkel  $d\omega$  emittiert wird und von Oszillatoren absorbiert werden kann, sei  $d\Phi_{\pi\pi}^*(\vartheta)$ , diejenige, die von Rotatoren beider Umlaufrichtungen absorbiert werden kann, sei  $d\Phi_{\pi\sigma}^*(\vartheta)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} I^d(\vartheta) d\omega &= \frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta d\omega = d\Phi_{\pi\pi}^*(\vartheta) + d\Phi_{\pi\sigma}^*(\vartheta) \\ &= \frac{(E^a)^2}{4\pi} (\sin^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta) d\omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$d\Phi_{\pi\pi}^*(\vartheta) = \frac{3}{8\pi} \sin^4 \vartheta d\omega, \quad (4a)$$

$$d\Phi_{\pi\sigma}^*(\vartheta) = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\omega. \quad (4b)$$

<sup>16)</sup> Da keine Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  besteht, wird willkürlich für die weiteren Betrachtungen  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gewählt.

Auf dem Wege von  $\varrho$  bis  $\varrho + d\varrho$  wird der Bruchteil  $-\left(\frac{dD(\varrho)}{d\varrho}\right)_\varrho d\varrho$  der innerhalb von  $d\omega$  fließenden Strahlung absorbiert; dabei ist  $D(\varrho)$  das Durchlässigkeitsvermögen einer Gasschicht der Dicke  $\varrho$  für die gesamte Linie und dementsprechend  $-\int_0^\infty \frac{dD(\varrho)}{d\varrho} d\varrho = 1$ . Multipliziert man nun die Gln. (4a) und (4b) mit

$-\left(\frac{dD}{d\varrho}\right)_\varrho d\varrho$  und erweitert man mit  $\varrho^2$ , so erhält man die Strahlungsleistungen  $d\Phi_{\pi\pi}(\varrho, \vartheta)$  und  $d\Phi_{\pi\sigma}(\varrho, \vartheta)$ , die von den Oszillatoren bzw. von den Rotatoren beider Umlaufrichtungen innerhalb eines Volumenelements  $dV$  im Abstand  $\varrho$  vom Emissions-Oszillator absorbiert werden, da ja  $\varrho^2 d\varrho d\omega$  gerade das Volumenelement  $dV$  bei  $P(\varrho, \vartheta, \varphi)$  im Kugelkoordinatensystem mit dem Nullpunkt am Emissionsort  $P'$  ist.

$$d\Phi_{\pi\pi}(\varrho, \vartheta) = -\frac{3}{8\pi\varrho^2} \sin^4 \vartheta \frac{dD}{d\varrho} dV, \quad (5a)$$

$$d\Phi_{\pi\sigma}(\varrho, \vartheta) = -\frac{3}{8\pi\varrho^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \frac{dD}{d\varrho} dV. \quad (5b)$$

Von einem Rotator mit rechtem Umlaufsinn (Blick in Magnetfeldrichtung) werde beispielsweise in der Richtung  $\vartheta$  eine elliptisch polarisierte Welle mit

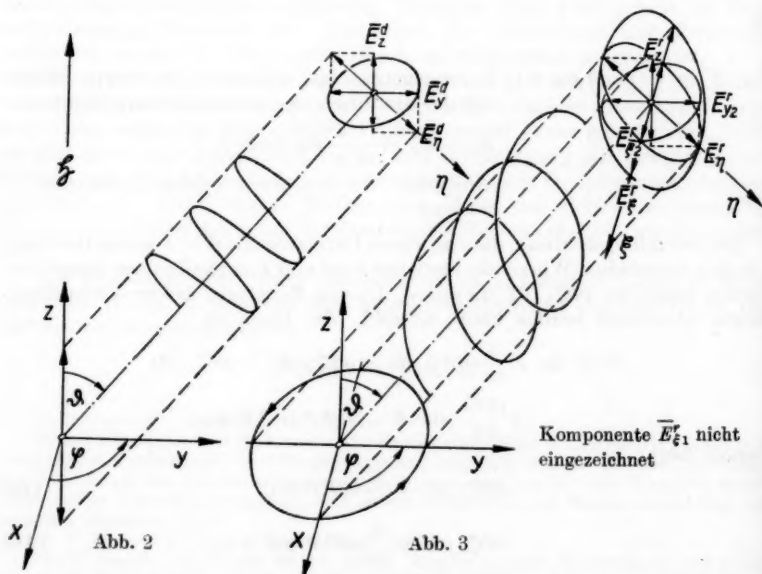


Abb. 2 und 3. Zur Absorption einer in der Richtung  $\vartheta, \varphi$  emittierten linear polarisierten Lichtwelle (Abb. 2) und einer elliptisch polarisierten Lichtwelle (Abb. 3) durch Oszillatoren und Rotatoren, die durch ein sehr schwaches Magnetfeld ausgerichtet sind.



linkem Umlaufsinn (bezüglich der Fortpflanzungsrichtung) ausgestrahlt (Abb. 3):

$$\begin{aligned} E_z^r &= E_x^r = \frac{E^r}{\varrho} \sin(\omega + \Delta\omega) \left( t - \frac{\varrho}{c} \right), \\ E_y^r &= -\frac{E^r}{\varrho} \cos \vartheta \cos(\omega + \Delta\omega) \left( t - \frac{\varrho}{c} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Aus dem folgenden Schema geht die Zerlegung dieser elliptisch polarisierten Welle hervor, die erforderlich ist, um zu erkennen, inwieweit durch sie die Oszillatoren und Rotatoren angeregt werden können.

$$\bar{E}_{z1}^r = \bar{E}_{x1}^r = \frac{E^r}{\varrho} \sqrt{1 - \cos^4 \vartheta} \rightarrow 2 \text{ entgegengesetzt zirkular polarisierte}$$

Wellen mit der Amplitude der einzelnen Komponenten

$$\bar{E}_{x1}^r = \bar{E}_{y1}^r = \frac{1}{2} \frac{E^r}{\varrho} \sqrt{1 - \cos^4 \vartheta}$$

(Anregung der Rotatoren beider Umlaufrichtungen)

$$\bar{E}_z^r = \bar{E}_x^r$$

$$\bar{E}_{z2}^r = \bar{E}_{x2}^r = \frac{E^r}{\varrho} \cos^2 \vartheta$$

(Anregung der Rotatoren mit rechtem Umlaufsinn)

$$\bar{E}_{y2}^r = \frac{E^r}{\varrho} \cos^2 \vartheta$$

(Anregung der Oszillatoren).

$$\bar{E}_z^r = \frac{E^r}{\varrho} \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Dann ergibt sich schließlich analog zu den Berechnungen bei der Oszillatoremission allgemein die Strahlungsleistung, die innerhalb eines Volumenelements  $dV$  von den Oszillatoren, den gleichsinnigen Rotatoren und den gegensinnigen Rotatoren bei Rotatoremission absorbiert wird:

$$d\Phi_{\sigma^+ \pi}(\varrho, \vartheta) = d\Phi_{\sigma^- \pi}(\varrho, \vartheta) = -\frac{3}{16 \pi \varrho^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \frac{dD}{d\varrho} dV, \quad (7a)$$

$$d\Phi_{\sigma^+ \sigma^+}(\varrho, \vartheta) = d\Phi_{\sigma^- \sigma^-}(\varrho, \vartheta) = -\frac{3}{32 \pi \varrho^2} (1 + 3 \cos^4 \vartheta) \frac{dD}{d\varrho} dV, \quad (7b)$$

$$d\Phi_{\sigma^+ \sigma^-}(\varrho, \vartheta) = d\Phi_{\sigma^- \sigma^+}(\varrho, \vartheta) = -\frac{3}{32 \pi \varrho^2} (1 - \cos^4 \vartheta) \frac{dD}{d\varrho} dV. \quad (7c)$$

Anfangs wurde die Voraussetzung gemacht, daß die Aufspaltung des Terms durch das Magnetfeld noch sehr klein ist. Wie sich nun deutlich gezeigt hat, muß im äußersten Fall entsprechend der formalen Zerlegung der Wellen die von einem Rotator emittierte Strahlung auch von Rotatoren mit entgegengesetzten Umlaufsinn absorbiert werden. Es muß also  $2\Delta\omega$  noch klein gegenüber der Doppler-Breite  $\Delta\omega_D$  (in Kreisfrequenz-Einheiten) sein. Sonst ist die Absorption der Strahlung mit den Frequenzen  $(\omega + \Delta\omega)$  und  $(\omega - \Delta\omega)$  derart unterschiedlich, daß die abgeleiteten Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren. Im Fall starker Magnetfelder, in denen die 3 Komponenten als völlig getrennt angesehen werden können, ist die Absorption der von den Oszillatoren emittierten Strahlung durch die Rotatoren nicht mehr möglich. Ent-



sprechendes gilt für die von jedem der beiden Rotatoren emittierte Strahlung. Wenn also eine unaufgespaltene Linie in ein Resonanzgefäß eingestrahlt wird, das sich in einem Magnetfeld  $\mathcal{H}$  senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Lichtwelle befindet, so wird nur der Oszillator angeregt und senkrecht zu  $\mathcal{H}$  100proz. Polarisation beobachtet. Allgemein läßt sich sagen, daß bei derartigen starken Magnetfeldern im Fall des normalen Zeeman-Effekts der Polarisationsgrad nicht mehr durch die Strahlungsdiffusion herabgesetzt werden kann und daß die Strahlungsdiffusion selbst abnimmt, da die Absorption kleiner wird. Für mittlere Magnetfelder ergeben sich kompliziertere Verhältnisse, die rechnerisch nur sehr schwer zu erfassen sind. Auch beim Vorliegen des anomalen Zeeman-Effekts, bei dem noch die im nächsten Abschnitt zu erörternde Reemissionsdepolarisation hinzutritt, läßt sich ganz allgemein nur feststellen, daß der Polarisationsgrad bei wachsendem Magnetfeld weniger durch die Strahlungsdiffusion beeinflusst wird. Näheres läßt sich nur bei der Diskussion des speziellen Falls aussagen.

Den Atomen wurden zur Beschreibung der Emission und Absorption Oszillatoren und Rotatoren zugeordnet. Dadurch war es möglich, die Berechnungen anschaulich klassisch durchzuführen. Durch die Normierung der emittierten Strahlungsleistung auf 1 kann auf Grund der Gln. (5a, b), (7a, b, c) die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines von einem Oszillator bzw. Rotator bei  $P'$  emittierten Lichtquants beim Punkt  $P(\varrho, \vartheta, \varphi)$  durch die Oszillatoren bzw. Rotatoren angegeben werden. Es ist

$$W_{\alpha\beta}(\varrho, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{dV} d\Phi_{\alpha\beta}(\varrho, \vartheta, \varphi) = - \frac{3}{8\pi\varrho^2} f_{\alpha\beta}(\vartheta) \frac{dD}{d\varrho} \quad (8)$$

mit

$f_{\pi\pi}(\vartheta) = \sin^4 \vartheta$  für Oszillator-Emission und Absorption durch Oszillatoren,

$f_{\pi\sigma^+}(\vartheta) = f_{\pi\sigma^-}(\vartheta) = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$  für Oszillator-Emission und Absorption durch Rotatoren einer Umlaufrichtung,

$f_{\pi\sigma}(\vartheta) = \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$  für Oszillator-Emission und Absorption durch Rotatoren beider Umlaufrichtungen,

$f_{\sigma^+\pi}(\vartheta) = f_{\sigma^-\pi}(\vartheta) = \frac{1}{2} \sin^2 \cos^2 \vartheta$  für die Emission eines Rotators mit rechtem oder linkem Umlaufsinn und Absorption durch Oszillatoren,

$f_{\sigma^+\sigma^+}(\vartheta) = f_{\sigma^-\sigma^-}(\vartheta) = \frac{1}{4} (1 + 3 \cos^4 \vartheta)$  für die Emission eines Rotators mit rechtem oder linkem Umlaufsinn und Absorption durch gleichsinnige Rotatoren,

$f_{\sigma^+\sigma^-}(\vartheta) = f_{\sigma^-\sigma^+}(\vartheta) = \frac{1}{4} (1 - \cos^4 \vartheta)$  für die Emission eines Rotators mit rechtem oder linkem Umlaufsinn und Absorption durch gegensinnige Rotatoren,

$f_{\sigma^+\sigma}(\vartheta) = f_{\sigma^-\sigma}(\vartheta) = \frac{1}{2} (1 + \cos^4 \vartheta)$  für die Emission eines Rotators mit rechtem oder linkem Umlaufsinn und Absorption durch Rotatoren beider Umlaufrichtungen.

Jetzt sollen die primären, sekundären . . . Anregungsdichten der Oszillatoren und Rotatoren (beider Umlaufrichtungen zusammen) berechnet werden, also die Zahl  $n_i^\pi(\tau)$  bzw.  $n_i^\sigma(\tau)$  der Atome pro  $\text{cm}^3$  bei  $P(\tau)$ , die durch Fluoreszenz ( $i-1$ )-ter Ordnung auf das Niveau mit  $m=0$  bzw.  $m=\pm 1$  beim normalen Zeeman-Effekt gebracht worden sind;  $\tau$  sei die mittlere Lebensdauer der angeregten Zustände. Die Zustrahlung erfolgt aus allen Volumenelementen des Gases mit dem gesamten Volumen  $\mathfrak{B}$ . Die Zahl der pro sec und  $\text{cm}^3$  an der Stelle  $P(\tau)$  durch Einstrahlung von außen angeregten Oszillatoren und Rotatoren sei  $s_1^\pi(\tau)$  bzw.  $s_1^\sigma(\tau)$ . Dann ergibt sich das Gleichungssystem<sup>17)</sup> analog zu früheren Ableitungen<sup>12)</sup> bei isotroper Emission:

$$n_1^\pi(\tau) = \tau s_1^\pi(\tau) \quad (9^*)$$

$$n_1^\sigma(\tau) = \tau s_1^\sigma(\tau)$$

$$n_i^\pi(\tau) = \int_{\mathfrak{B}} n_{i-1}^\pi(\tau') W_{\pi\pi}(\tau, \tau') d\tau' + \int_{\mathfrak{B}} n_{i-1}^\sigma(\tau') W_{\sigma\pi}(\tau, \tau') d\tau'$$

$$n_i^\sigma(\tau) = \int_{\mathfrak{B}} n_{i-1}^\pi(\tau') W_{\pi\sigma}(\tau, \tau') d\tau' + \int_{\mathfrak{B}} n_{i-1}^\sigma(\tau') W_{\sigma\sigma}(\tau, \tau') d\tau'.$$

In diesen Gleichungen ist  $\tau$  für  $x, y, z$ ,  $\tau'$  für  $x', y', z'$  und  $d\tau'$  für  $dx' \cdot dy' \cdot dz'$  gesetzt. Weiter ist  $W_{\alpha\beta}(\tau, \tau') = W_{\alpha\beta}(\varrho, \vartheta, \varphi)$  mit

$$\varrho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

$$\vartheta = \arctg \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{z-z'},$$

$$\varphi = \arctg \frac{y-y'}{x-x'}.$$

Die Berechnungen der Intensität des außerhalb des Resonanzgefäßes beobachteten Fluoreszenzlichts aus der Anregungsdichte ist früher<sup>18)</sup> eingehend erörtert worden. Es soll hier die einfachste Methode verwendet werden, bei der angenommen wird, die Strahlung komme aus einem Zylinder mit der Grundfläche  $dF$  und der Achse parallel zur Beobachtungsrichtung. Wenn dann die Intensitäten der beiden Komponenten mit senkrecht zueinander stehenden Polarisationsrichtungen bekannt sind, kann der Polarisationsgrad leicht berechnet werden (s. Teil II<sup>10)</sup>)).

### 3. Die Reemissionsdepolarisation

Beim anomalen Zeeman-Effekt kommt zur bisher erörterten Richtungsdepolarisation noch die Reemissionsdepolarisation. Von einem Niveau, das durch  $\pi$ -Licht angeregt ist, können meistens sowohl  $\pi$ - als auch  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Übergänge stattfinden; das gleiche gilt bei Anregung mit  $\sigma^+$ - oder  $\sigma^-$ -Licht. Es müßten nun die einzelnen Übergänge betrachtet und den  $\pi$ -Übergängen Oszillatoren und den  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Übergängen Rotatoren zugeordnet werden.

<sup>17)</sup> Es wird angenommen, daß die gesamte Linie von den Oszillatoren oder den Rotatoren eines Volumenelements stets unabhängig davon emittiert wird, welche spektrale Intensitätsverteilung die absorbierte Strahlung (innerhalb der Linie) besessen hat. Näheres hierzu findet sich in einer früheren Arbeit<sup>18)</sup>.

<sup>18)</sup> R. Seiwert, Exp. Techn. Physik 3 (1955), Sonderheft „Spektroskopie“, S. 6 ff.

<sup>19)</sup> R. Seiwert, Optik 16, 358 (1959).

Dieses sehr mühselige Verfahren kann unter folgenden Voraussetzungen vereinfacht werden. Das Magnetfeld soll noch so klein sein, daß keine merkliche Aufspaltung der Terme und damit auch der Spektrallinien auftritt. An diese Bedingung sind ja auch die Berechnungen zur Richtungsdepolarisation beim normalen Zeeman-Effekt geknüpft. Wenn eine Hyperfeinstrukturaufspaltung vorhanden ist, so sollen die Abstände der am weitesten auseinanderliegenden Komponenten noch klein gegenüber der Doppler-Breite sein; die einzelnen Komponenten sollen sich also alle noch vollständig überlagern. Diese Voraussetzung ist im Fall der NaD-Linien, für die in Teil II Berechnungen des Polarisationsgrades durchgeführt werden sollen, nicht mehr streng erfüllt; dennoch dürften die errechneten Werte nicht wesentlich von den tatsächlichen Polarisationsgraden abweichen.

Es sollen jetzt folgende Modellvorstellungen eingeführt werden. Den  $\pi$ -Übergängen bei der Absorption entspricht die Anregung der Absorptions-Oszillatoren, den  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Übergängen die Anregung der Absorptions-Rotatoren. Dann geht die Anregungsenergie von den Absorptions-Oszillatoren bzw. von den Absorptions-Rotatoren beider Umlaufrichtungen in einem bestimmten durch die Verteilungsfaktoren  $V_{\alpha\beta}$  festgelegten Verhältnis auf Emissions-Oszillatoren und die Emissions-Rotatoren über. Die Ausstrahlung des  $\pi$ - bzw.  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Lichts durch diese und seine Absorption durch die Absorptions-Oszillatoren und Absorptions-Rotatoren erfolgt richtungsabhängig, wie das bereits in Abschn. 2 erörtert worden ist. Es tritt also neben der Reemissionsdepolarisation, die in dem Übergang der Anregungsenergie von den Absorptions-Oszillatoren bzw. Absorptions-Rotatoren auf die Emissions-Oszillatoren und Emissions-Rotatoren ihren Ausdruck findet, wiederum die Richtungsdepolarisation auf. Mit  $n_i^\pi$  und  $n_i^{\sigma^+}$  bzw.  $n_i^{\sigma^-}$  soll die Zahl der durch die  $(i-1)$ -te Fluoreszenz angeregten Emissions-Oszillatoren und Emissions-Rotatoren mit rechtem bzw. linkem Umlaufsinn pro  $\text{cm}^3$  bezeichnet werden. Auf Grund der anfangs angegebenen Voraussetzungen und des Ersatzbildes für den Reabsorptions-Reemissionsvorgang kann man alle  $\pi$ - und alle  $\sigma^+$ - bzw.  $\sigma^-$ -Komponenten zusammen behandeln und die bereits in Abschn. 2 abgeleiteten Gleichungen für die Richtungspolarisation wieder verwenden; es braucht nur noch die Verteilung der Anregungsenergie nach der Absorption auf die Emissions-Oszillatoren und Emissions-Rotatoren berücksichtigt zu werden. Selbstverständlich muß man sich dabei darüber im klaren sein, daß es tatsächlich nur angeregte Atome in einem bestimmten  $m_j$ - bzw. (beim Vorhandensein einer Hyperfeinstruktur) in einem bestimmten  $m_F$ -Niveau gibt, von denen dann meistens  $\pi$ -,  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Übergänge stattfinden.

Die Verteilungsfaktoren  $V_{\alpha\beta}$  sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$V_{\pi\pi} = \frac{a_{\pi\pi}}{a_{\pi\pi} + 2 a_{\pi\sigma^+}} \quad \text{Absorptions-Oszillator} \rightarrow \text{Emissions-Oszillator}$$

$$V_{\pi\sigma^+} = V_{\pi\sigma^-} = \frac{a_{\pi\sigma^+}}{a_{\pi\pi} + 2 a_{\pi\sigma^+}} \quad \text{Absorptions-Oszillator} \rightarrow \text{Emissions-Rotator}$$

$$V_{\sigma^+\pi} = V_{\sigma^-\pi} = \frac{a_{\sigma^+\pi}}{a_{\sigma^+\pi} + a_{\sigma^+\sigma^+} + a_{\sigma^-\sigma^-}} \quad \text{Absorptions-Rotator} \rightarrow \text{Emissions-Oszillator}$$

$$V_{\sigma^+ \sigma^+} = V_{\sigma^- \sigma^-} = \frac{a_{\sigma^+ \sigma^+}}{a_{\sigma^+ \pi} + a_{\sigma^+ \sigma^+} + a_{\sigma^+ \sigma^-}} \text{ Absorptions-Rotator} \rightarrow \text{gleichsinniger Emissions-Rotator}$$

$$V_{\sigma^+ \sigma^-} = V_{\sigma^- \sigma^+} = \frac{a_{\sigma^+ \sigma^-}}{a_{\sigma^+ \pi} + a_{\sigma^+ \sigma^+} + a_{\sigma^+ \sigma^-}} \text{ Absorptions-Rotator} \rightarrow \text{gegensinniger Emissions-Rotator}$$

$$V_{\pi \sigma} = 2 V_{\pi \sigma^+} \text{ Absorptions-Oszillator} \rightarrow \text{beide Emissions-Rotatoren}$$

$$V_{\sigma^+ \sigma} = V_{\sigma^- \sigma} = V_{\sigma^+ \sigma^+} + V_{\sigma^+ \sigma^-} \text{ Absorptions-Rotator} \rightarrow \text{beide Emissions-Rotatoren}$$

$a_{\pi \pi}$  relative Intensität der gesamten  $\pi$ -Strahlung bei  $\pi$ -Anregung,

$a_{\pi \sigma^+} = a_{\pi \sigma^-}$  relative Intensität der gesamten  $\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma^+ \\ \sigma^- \end{smallmatrix} \right\}$ -Strahlung bei  $\pi$ -Anregung,

$a_{\sigma^+ \pi} = a_{\sigma^- \pi}$  relative Intensität der gesamten  $\pi$ -Strahlung bei  $\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma^+ \\ \sigma^- \end{smallmatrix} \right\}$ -Anregung,

$a_{\sigma^+ \sigma^+} = a_{\sigma^- \sigma^-}$  relative Intensität der gesamten  $\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma^+ \text{-Strahlung bei } \sigma^+ \text{-Anregung} \\ \sigma^- \text{-Strahlung bei } \sigma^- \text{-Anregung} \end{smallmatrix} \right\}$ ,

$a_{\sigma^+ \sigma^-} = a_{\sigma^- \sigma^+}$  relative Intensität der gesamten  $\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma^+ \text{-Strahlung bei } \sigma^- \text{-Anregung} \\ \sigma^- \text{-Strahlung bei } \sigma^+ \text{-Anregung} \end{smallmatrix} \right\}$ .

Diese relativen Intensitäten lassen sich für den hier zutreffenden Fall der Breitlinienanregung leicht berechnen<sup>20)</sup>.

Das Gleichungssystem für die Anregungsdichten der Emissionsoszillatoren und Emissionsrotatoren lautet schließlich:

$$\begin{aligned} n_i^{\pi} &= C_i^{\pi} V_{\pi \pi} + C_i^{\sigma^+} V_{\sigma^+ \pi} + C_i^{\sigma^-} V_{\sigma^- \pi} \\ n_i^{\sigma^+} &= C_i^{\pi} V_{\pi \sigma^+} + C_i^{\sigma^+} V_{\sigma^+ \sigma^+} + C_i^{\sigma^-} V_{\sigma^- \sigma^+} \\ n_i^{\sigma^-} &= C_i^{\pi} V_{\pi \sigma^-} + C_i^{\sigma^+} V_{\sigma^+ \sigma^-} + C_i^{\sigma^-} V_{\sigma^- \sigma^-} \end{aligned} \quad (10^*)$$

mit

$$C_1^{\pi} = \tau s_1^{\pi}, \quad C_1^{\sigma^+} = \tau s_1^{\sigma^+}, \quad C_1^{\sigma^-} = \tau s_1^{\sigma^-} \quad (11a^*)$$

und

$$\begin{aligned} C_i^{\pi} &= B_i^{\pi \pi} + B_i^{\sigma^+ \pi} + B_i^{\sigma^- \pi} \\ C_i^{\sigma^+} &= B_i^{\pi \sigma^+} + B_i^{\sigma^+ \sigma^+} + B_i^{\sigma^- \sigma^+} \\ C_i^{\sigma^-} &= B_i^{\pi \sigma^-} + B_i^{\sigma^+ \sigma^-} + B_i^{\sigma^- \sigma^-} \end{aligned} \quad (11b^*)$$

für  $i > 1$ .

Dabei sind mit  $B_i^{\alpha \beta}$  folgende Integrale bezeichnet:

$$B_i^{\alpha \beta}(\mathbf{r}) = \int_{\mathfrak{B}} n_{i-1}^{\alpha}(\mathbf{r}') W_{\alpha \beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (12)$$

<sup>20)</sup> J. H. Van Vleck, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 11, 612 (1925); A. C. G. Mitchell Physic. Rev. 40, 964 (1932).

Wenn mit  $\sigma$ -Licht, also  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Licht gleicher Stärke oder nur mit  $\pi$ -Licht angeregt und dementsprechend nur der Anteil des gesamten  $\sigma$ -Lichts in der Fluoreszenzstrahlung von Interesse ist, so reduziert sich das Gleichungssystem auf die beiden Gleichungen für  $n_i^{\pi}$  und  $n_i^{\sigma}$ . Diese Vereinfachung läßt sich leicht durch Addition der entsprechenden Glieder der oben angeschriebenen Gleichungen durchführen.

Auf die Einzelheiten der Berechnung des Polarisationsgrades wird in Teil II bei der Behandlung von drei speziellen Fällen näher eingegangen.

Berlin-Adlershof, Institut für Optik und Spektroskopie der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 26. Februar 1959.

**Berechnung des  
Polarisationsgrades der Resonanzfluoreszenz  
beim Auftreten der Strahlungsdiffusion. II**

Von R. Seiwert und W. Ermisch<sup>1)</sup>

Mit 7 Abbildungen

**Inhaltsübersicht**

Die Gleichungen, die in Teil I<sup>2)</sup> zur Berechnung des Polarisationsgrades unter Berücksichtigung der Strahlungsdiffusion abgeleitet worden sind, werden auf drei Fälle angewandt, für die experimentelle Ergebnisse vorliegen. Die erhaltenen Resultate stimmen mit den experimentellen Ergebnissen so gut überein, wie dies in Anbetracht der notwendigen Vereinfachungen bei der Rechnung möglich ist. Das kann als Bestätigung dafür angesehen werden, daß tatsächlich bei sehr kleinen Teilchendichten die Depolarisation durch Strahlungsdiffusion bewirkt wird.

**1. Einleitung**

In Teil I<sup>2)</sup> wurden die allgemeinen Gleichungen zur Berechnung der Depolarisation der Resonanzstrahlung bei kleinen Teilchendichten aufgestellt. Jetzt sollen diese Gleichungen auf spezielle Fälle angewandt werden, die experimentell untersucht worden sind. In Abschn. 2 wird der Polarisationsgrad bei reiner Richtungsdepolarisation und Anregung mit unpolarisiertem Licht berechnet. Diese Ergebnisse können mit Meßwerten von Rollet, Brossel und Kastler<sup>3)</sup> sowie von Guichon, Blamont und Brossel<sup>4)</sup> für die Resonanzfluoreszenz von Hg<sup>198</sup> bzw. Hg<sup>202</sup> verglichen werden. Abschn. 3 befaßt sich mit der Depolarisation der Natrium-Resonanzfluoreszenz bei  $\pi$ -Anregung, bei der die Richtungs- und die Reemissionsdepolarisation auftreten. Die Resultate der Rechnung werden darauf geprüft, inwieweit sie mit den Meßwerten der Verfasser<sup>5)</sup> übereinstimmen. Schließlich werden in Abschn. 4 nach einer vereinfachten Methode überschlägig Polarisationsgrade für die Natrium-Resonanzfluoreszenz bei  $\sigma^+$ -Anregung berechnet und mit früheren Meßergebnissen von Hanle<sup>6)</sup> verglichen. In Abschn. 5 werden noch einmal kurz die wesentlichen Vereinfachungen, Näherungen und Vernachlässigungen

<sup>1)</sup> II. Physikal. Inst. d. Humboldt-Universität zu Berlin.

<sup>2)</sup> R. Seiwert u. W. Ermisch, Ann. Physik (7) **5**, 4 (1959).

<sup>3)</sup> N. Rollet, J. Brossel u. A. Kastler, C. R. Acad. Sci. (Paris) **242**, 240 (1956).

<sup>4)</sup> M. A. Guichon, J. E. Blamont u. J. Brossel, C. R. Acad. Sci. (Paris) **243**, 1859 (1956); J. Physique Radium **18**, 99 (1957).

<sup>5)</sup> W. Ermisch u. R. Seiwert, Ann. Physik (7) **2**, 393 (1958); (7) **3**, 428 (1959).

<sup>6)</sup> W. Hanle, Z. Physik **41**, 164 (1927).

bei den durchgeführten Berechnungen zusammengestellt, und es wird erörtert, welche Voraussetzungen erfüllt sein müßten, damit sich eine Verbesserung des Berechnungsverfahrens lohnte, und mit welchem Ziel die Untersuchungen der Polarisation der Resonanzfluoreszenz fortgesetzt werden sollten.

## 2. Reine Richtungsdepolarisation bei Anregung mit unpolarisiertem Licht

Die Anregung erfolge mit unpolarisiertem Licht einer Resonanzlinie, die im Magnetfeld in ein Triplett aufspaltet. Das Magnetfeld sei der Fortpflanzungsrichtung des Lichts gleich- oder entgegengerichtet. Dann können durch das eingestrahlte Licht nur die beiden Zustände angeregt werden, von denen  $\sigma^-$ - und  $\sigma^+$ -Übergänge in den Grundzustand führen. Die Polarisation der Resonanzfluoreszenzstrahlung ist also dieselbe wie bei der Anregung mit zirkular polarisiertem Licht. Außerdem ändert sich unter den zugrunde gelegten Bedingungen der Polarisationsgrad für  $|\xi| \rightarrow 0$  nicht, wie bereits in Abschn. I, 2<sup>7)</sup> festgestellt wurde. Die Beobachtung der Fluoreszenzstrahlung soll senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des anregenden Lichts erfolgen.

Die Grundlage der Berechnungen bildet das Gleichungssystem I, 9\*. Vorausgesetzt wird eine geringe Teilchendichte, so daß die Anregungsdichten höherer Ordnung nur näherungsweise berücksichtigt zu werden brauchen. Ein weiterer Vorteil ist der, daß bei den durch Doppler-Effekt verbreiterten Linien das Durchlässigkeitsvermögen

$$D = e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} q} = e^{-k^* q} \quad (1)$$

gesetzt werden kann, wenn die Absorption gering ist<sup>8)</sup>. Dabei ist  $k_D$  der Absorptionskoeffizient in der Linienmitte. Für das Integrationsvolumen  $\mathfrak{B}$  muß eine Form gewählt werden, die einerseits den üblichen Versuchsbedingungen etwa entspricht, andererseits aber die Integration über 2 der 3 Koordinaten ohne die Benutzung numerischer Methoden ermöglicht. Wollte man die genaue Abhängigkeit  $D = D(q)$  berücksichtigen, so würde noch eine numerische Integration über die Frequenz notwendig werden. Gewiß treten bei dem Integrationsvolumen Gebiete auf, für die obige Näherung Gl. (1) für  $D = D(q)$  schlecht ist; doch liefern gerade diese Gebiete zum Wert des Integrals nur noch unbedeutendere Beiträge.

Die primäre  $\sigma$ -Anregung erfolge gleichmäßig in einem Zylinder mit dem Radius  $R'$ . Da sich bei  $\sigma$ -Anregung die sekundäre Anregungsdichte radialsymmetrisch zur Einstrahlungsrichtung (s. Abb. I, 3; Anregung in Richtung der  $z$ -Achse) ergibt, wird als Integrationsvolumen ein koaxialer Zylinder mit

<sup>7)</sup> Die Abschnitte in Teil I und die dort abgeleiteten Gleichungen werden durch eine „I“ gekennzeichnet.

<sup>8)</sup> Die von Mitchell und Zemansky<sup>9)</sup> angegebene Reihenentwicklung für die Absorption bei gleicher Doppler-Breite der eingestrahlten und der Absorptions-Linie kann

für kleine Werte von  $k_D$  durch die Reihe für  $\left(1 - e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} q}\right)$  näherungsweise ersetzt werden. Bei  $k_D q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  ist der Fehler der Näherung für das Durchlässigkeitsvermögen -2% und bei  $k_D q = \sqrt{2}$  erst -8%.

<sup>9)</sup> A. C. G. Mitchell u. M. W. Zemansky, Resonance Radiation and Excited Atoms, S. 323, Cambridge 1934.



dem Radius  $R (> R')$  gewählt, der sich in Richtung seiner Achse von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt (Abb. 1).  $n_2^x(r)$  und  $n_2^y(r)$  lassen sich trotzdem nicht geschlossen berechnen. Vielmehr müssen die Anregungsdichten für einzelne Werte  $r_n$  ermittelt werden. Praktischerweise wählt man für die Rechnung Kugelkoordinaten und legt die Koordinatenachse parallel zur Zylinderachse durch einen Punkt mit dem Abstand  $r_n$  von dieser. Weiter sei  $r_n = nd$ ,  $R = ud$  und  $R' = vd$ , wobei  $n$ ,  $u$  und  $v$  ganze Zahlen sind. (Durch geeignete Wahl von  $d$  läßt sich das genau oder wenigstens in guter Näherung erreichen.) Entsprechend den Anregungsbedingungen ist  $n_1^x(r) = 0$ . Da die absolute Größe der Anregungsdichte nicht von Interesse ist, kann  $n_1^y(r) = \tau s_1^y(r) = 1$  gesetzt werden für  $r \leq R'$ . Für  $R' < r \leq R$  ist  $\tau s_1^y(r) = 0$ .

Die Integration über  $\varphi$  läßt sich sofort durchführen; es ergibt sich

$$n_2^x(r) = + \frac{3}{16\pi} \int_{\varphi} \int_{\vartheta} e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} \varrho} \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi \Big|_{\varrho_{eu}}^{\varrho_{eo}} \quad (2a)$$

$$n_2^y(r) = + \frac{3}{16\pi} \int_{\varphi} \int_{\vartheta} e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} \varrho} (1 + \cos^4 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \Big|_{\varrho_{eu}}^{\varrho_{eo}}. \quad (2b)$$

Die Integrationsgrenzen für  $\varrho$  sind von  $\vartheta$  abhängig, die für  $\vartheta$  nochmals von  $\varphi$ . Die Integration über  $\vartheta$  ist nicht mehr elementar möglich, sondern nur mit Hilfe von Reihenentwicklungen. Daher würde die nochmalige exakte Integration über  $\varphi$  einen sehr großen rechnerischen Aufwand mit sich bringen. Das kann man durch folgende näherungsweise Rechnung umgehen. Man unterteilt das Integrationsvolumen, den Zylinder mit dem Radius  $R'$ , in einen Zylinder und Hohlzylindersektoren (Abb. 2) und berechnet, welchen Beitrag diese zu den Anregungsdichten in einem bestimmten Punkt liefern.

Dabei treten die folgenden Integrale auf, die mit Hilfe von Reihenentwicklung gelöst werden müssen; hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

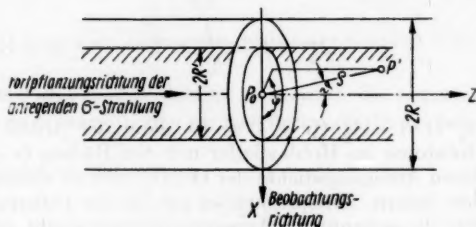


Abb. 1. Zylindrisches Integrationsvolumen bei  $\sigma$ -Anregung und reiner Richtungsdepolarisation

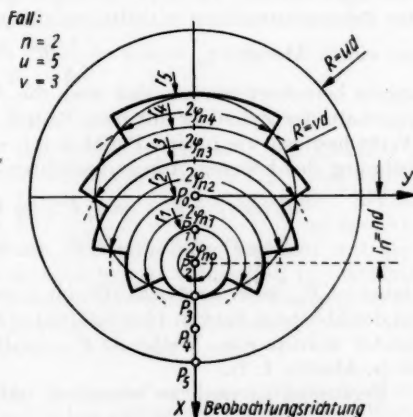


Abb. 2. Unterteilung des zylindrischen Integrationsvolumens in der Abb. 1

$$A_2^{\sigma\pi}(v d) = \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} v d \frac{1}{\sin \vartheta}} \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta \quad (3a)$$

$$A_2^{\sigma\sigma}(v d) = \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} v d \frac{1}{\sin \vartheta}} (1 + \cos^4 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (3b)$$

$$v = 0, 1, 2, \dots (v + u).$$

$A_2^{\sigma\pi}(v d) - A_2^{\sigma\pi}((v + 1) d)$  ist dann der Anteil, den die primär angeregten Rotatoren im Hohlzylinder mit den Radien  $(v + 1) d$  und  $v d$  zu der sekundären Anregungsdichte der Oszillatoren an einem Punkt der Achse des Zylinders liefern. Entsprechendes gilt für die Differenz  $A_2^{\sigma\sigma}(v d) - A_2^{\sigma\sigma}((v + 1) d)$ . Für die sekundären Anregungsdichten ergibt sich

$$n_2^{\pi}(r_n = n d) = \sum_{v=p}^{2+n} [A_2^{\sigma\pi}(v d) - A_2^{\sigma\pi}((v + 1) d)] \Phi_{nv} \quad (4a)$$

$$n_2^{\sigma}(r_n = n d) = \sum_{v=p}^{2+n} [A_2^{\sigma\sigma}(v d) - A_2^{\sigma\sigma}((v + 1) d)] \Phi_{nv} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & p = 0 \quad \text{für } n \leq v \\ \text{und} \quad & p = n - v \quad \text{für } n > v. \end{aligned} \quad (4')$$

$$\Phi_{nv} = \frac{3}{4\pi} \varphi_{nv} = \frac{3}{4} \quad \text{für } (n + v) \leq v - 1 \text{ und} \quad (5a)$$

$$\Phi_{nv} = \frac{3}{4\pi} \varphi_{nv} = \frac{1}{120} \arccos \sqrt{\frac{(2n + 2v + 2v + 1)(2n - 2v + 2v + 1)}{8n(2v + 1)}} \quad (5b)$$

für  $(n + v) \geq v$ .

Dabei ist der  $\arccos$  im Gradmaß  $[\circ]$  zu ermitteln.

Jetzt müßten noch die Anregungsdichten höherer Ordnung nach Gl. I, 9\* berechnet werden. Da aber vorausgesetzt worden ist, daß die Reabsorption der Resonanzstrahlung verhältnismäßig gering ist, sollen sie nur für Punkte mit einem Abstand  $r_m = m d \approx \frac{1}{\sqrt{2}} R'$  von der Zylinderachse unter der Annahme berechnet werden, daß auch die Anregungsdichten höherer Ordnung innerhalb des Zylinders mit dem Radius  $R'$  konstant sind und die gleichen Werte besitzen wie in den Punkten mit  $r_m$ . Das Gleichungssystem zur Berechnung der höheren Anregungsdichten lautet:

$$\begin{aligned} n_i^{\pi}(m d) &= n_{i-1}^{\pi}(m d) F_{\pi\pi}(m d) + n_{i-1}^{\sigma}(m d) F_{\sigma\pi}(m d) \\ n_i^{\sigma}(m d) &= n_{i-1}^{\pi}(m d) F_{\pi\sigma}(m d) + n_{i-1}^{\sigma}(m d) F_{\sigma\sigma}(m d). \end{aligned} \quad (6*)$$

Dabei ist  $F_{\sigma\pi}(m d) = n_2^{\pi}(m d)$  [Gl. (4a)] und  $F_{\sigma\sigma}(m d) = n_2^{\sigma}(m d)$  [Gl. (4b)], da bei der Ableitung der Gln. (4a) und (4b)  $n_2^{\pi}(r) = 1$  für  $0 \leq r \leq R'$  und  $n_2^{\pi}(r) = 0$  gesetzt worden war. Weiter ist  $F_{\pi\sigma}(m d) = 2 F_{\sigma\pi}(m d)$ , weil  $W_{\pi\sigma} = 2 W_{\sigma\pi}$  ist (s. Abschn. I, 2).

Ergänzend ist noch zu bemerken, daß

$$F_{\pi\pi}(r_m = m d) = \sum_{v=p}^{2+m} [A_2^{\sigma\pi}(v d) - A_2^{\sigma\pi}((v + 1) d)] \Phi_{mv}$$

ist mit

$$(3a) \quad A^{\pi\pi}(\nu d) = \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} r d \frac{1}{\sin \theta}} \sin^5 \theta d\theta. \quad (3c)$$

(3b)  $p$  und  $\Phi_{m,r}$  sind durch die Gln. (4') und (5a, b) gegeben, wobei nur  $n$  durch  $m$  zu ersetzen ist.

(Wenn die Anregungsdichten  $n_{i+1}^{\pi} \approx c n_i^{\pi}$  werden, so können die weiteren Anregungsdichten als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe berücksichtigt werden.)

Schließlich können die Korrekturfaktoren

$$(4a) \quad \kappa^{\pi} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\pi}(r_m)}{n_2^{\pi}(r_m)} \quad \text{und} \quad \kappa^{\sigma} = \frac{\sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma}(r_m)}{n_2^{\sigma}(r_m)} \quad (7a, b)$$

(4b) berechnet werden. Mit diesen werden alle nach Gl. (4a) und (4b) erhaltenen sekundären Anregungsdichten multipliziert, und man bekommt die korrigierten Werte

$$(4') \quad n_x^{\pi}(r_n) = \kappa^{\pi} n_2^{\pi}(r_n) \quad \text{und} \quad n_x^{\sigma}(r_n) = \kappa^{\sigma} n_2^{\sigma}(r_n).$$

(5a) Dann ist

$$(5b) \quad \Phi_{\parallel} = \sum_{n=0}^{u-1} \frac{1}{2} \left[ n_x^{\pi}(n d) + n_x^{\pi}((n+1) d) \right] \cdot \left\{ e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} \left(u-n-\frac{1}{2}\right) d} + e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} \left(u+n+\frac{1}{2}\right) d} \right\}, \quad (8a)$$

$$\Phi_{\perp} = \sum_{n=0}^{u-1} \frac{1}{2} \left\{ n_1^{\sigma} \left( \left(n + \frac{1}{2}\right) d \right) + \frac{1}{2} \left[ n_x^{\sigma}(n d) + n_x^{\sigma}((n+1) d) \right] \right\} \cdot \left\{ e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} \left(u-n-\frac{1}{2}\right) d} + e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} \left(u+n+\frac{1}{2}\right) d} \right\} \quad (8b)$$

und der Polarisationsgrad in diesem Fall

$$P = \frac{\Phi_{\perp} - \Phi_{\parallel}}{\Phi_{\perp} + \Phi_{\parallel}}. \quad (9)$$

Wie schon in Teil I erwähnt wurde, haben Rollet, Brossel und Kastler<sup>3)</sup> den Polarisationsgrad der Resonanzfluoreszenz (2537 Å) von Hg<sup>198</sup> und natürlichem Quecksilber in Abhängigkeit vom Dampfdruck gemessen. Wenn  $d = 0,25$  cm,  $u = 5$  und  $v = 3$ , also  $R = 1,25$  cm und  $R' = 0,75$  cm gewählt wird, so stimmen die Querschnitte der beiden Zylinder ungefähr mit den Querschnitten des Resonanzgefäßes und des primär anregenden Lichtstrahls bei den Messungen der genannten Autoren überein. Mit den angegebenen Werten sind die in Tab. 1 zusammengestellten Polarisationsgrade auf Grund der oben abgeleiteten Gleichungen berechnet worden<sup>10)</sup>.

<sup>10)</sup> Die Werte für den Dampfdruck des Quecksilbers sind dem „Taschenbuch für Chemiker und Physiker“ von J. D'Ans und E. Lax entnommen worden. Die  $k_D$ -Werte sind nach der Formel  $k_D = 1,118 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{N}{\sqrt{T}}$  berechnet worden.

Die Abb. 3 enthält die Kurve für die Abhängigkeit des Polarisationsgrades von der Teilchendichte, die sich auf Grund der Rechnungen ergibt, sowie den hier interessierenden Teil der Meßkurve von Rollet, Brossel und Kastler<sup>3)</sup>

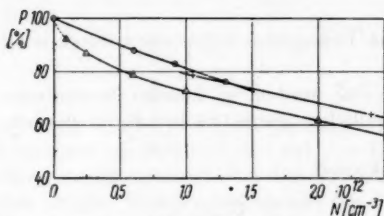


Abb. 3. Polarisationsgrad der Hg-Resonanzfluoreszenz ( $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ ) als Funktion der Teilchendichte bei unpolarisierter Anregung.  $\circ$  berechnete Werte für geradzahlige Hg-Isotope,  $\triangle$  experimentelle Werte für  $\text{Hg}^{198}$  von Rollet, Brossel und Kastler<sup>3)</sup> und  $+$  experimentelle Werte für  $\text{Hg}^{202}$  von Guichon, Blamont und Brossel<sup>4)</sup>

Tabelle 1

$T$ [°C]	$N$ [Hg-Atome/cm³]	$k_D$ [cm⁻¹]	$P$ [%]
–22,8	$0,60 \cdot 10^{12}$	$\rightarrow 0$	100
–19,0	$0,91 \cdot 10^{12}$	0,4	88
–16,0	$1,30 \cdot 10^{12}$	0,6	83
		0,9	76

stimmung, wenn man bedenkt, daß sowohl bezüglich der Geometrie der Anordnung als auch im Verlauf der Rechnungen bedeutende Vereinfachungen und Vernachlässigungen notwendig waren. Offensichtlich liegt die berechnete Kurve etwas über der Meßkurve von Rollet, Brossel und Kastler, während sie mit der Meßkurve nach Guichon, Blamont und Brossel erstaunlich gut übereinstimmt. Es ist aber durchaus möglich, daß die Meßwerte der zuerst genannten Autoren für den Polarisationsgrad etwas zu klein sind; hierfür spricht, daß sich bei einer Extrapolation der Meßkurve zwischen  $N = 10^{11} \text{ Hg-Atome/cm}^3$  und  $N \rightarrow 0$  ein sehr steiler Abfall des Polarisationsgrades mit wachsender Teilchendichte ergibt, der theoretisch nicht zu erwarten ist. Gerade bei den sehr kleinen Teilchendichten ist aber wegen der geringen Intensität der Fluoreszenzstrahlung die Bestimmung des Polarisationsgrades nur mit einer größeren Ungenauigkeit möglich.

### 3. Richtungs- und Reemissionsdepolarisation bei $\pi$ -Anregung

Bei einer  $\pi$ -Anregung ergibt sich für die sekundäre Anregungsdichte nicht die Radialsymmetrie zur Einstrahlungsrichtung wie bei der  $\sigma$ -Anregung. Daher bringt die Wahl eines Zylinders als Integrationsvolumen nicht die gewünschten Erleichterungen bei der Integration. Wie sich bereits im vorhergehenden Abschnitt gezeigt hat, vereinfacht sich die Rechnung beträchtlich bei Einführung von Kugelkoordinaten. Daher sollen die Berechnungen unter folgenden geometrischen Bedingungen ausgeführt werden. Der Dampf habe ein kugelförmiges Volumen mit dem Radius  $R$  und die Atome innerhalb einer konzentrischen Kugel mit dem Radius  $R' (< R)$  seien gleichmäßig durch  $\pi$ -Licht angeregt. Beobachtet wird senkrecht zur Anregungsrichtung. Gewiß darf man keine vollständige Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen erwarten, bei denen etwa die folgenden Versuchsbedingungen vorliegen. In ein quaderförmiges Resonanzgefäß fällt ein Lichtstrahl mit recht-

eckigem oder kreisförmigem Querschnitt ein. Doch erfordert schon in dem Fall der isotropen Emission die genauere Berücksichtigung der geometrischen

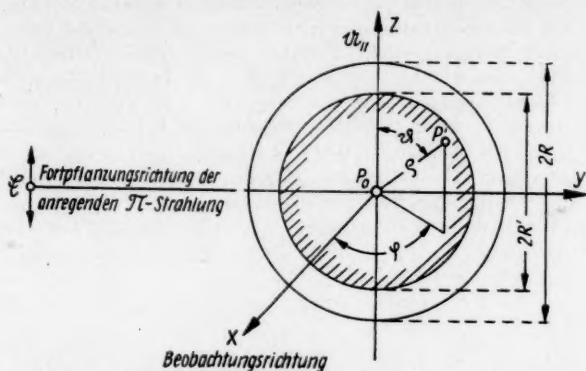


Abb. 4. Kugelförmiges Integrationsvolumen bei  $\pi$ -Anregung und Richtungs- sowie Re-emissionsdepolarisation

Anordnung einen sehr umfangreichen Rechenaufwand (s. z. B. <sup>11)</sup>). Bei der richtungsabhängigen Ausstrahlung würde er aber noch in beträchtlichem Maße gesteigert, so daß man ohne elektronische Rechenmaschinen kaum zum Ziele käme.

Wenn bei der Einstrahlung von linear polarisiertem Licht auch keine Radialsymmetrie bezüglich der Einstrahlungsrichtung vorhanden ist, so besteht sie aber doch bezüglich der Achse  $a_{||}$  der Kugel parallel zum  $\mathcal{E}$ -Vektor des primär anregenden Lichts (s. Abb. 1, 2 und Abb. 4). Zur Vereinfachung der Integration unterteilt man die Kugel mit dem Radius  $R'$  analog, wie dies in Abschn. 2 mit dem Zylinder getan wurde, und zwar in eine Kugel und Hohlkugelausschnitte (s. Abb. 5), deren Mittelpunkt jeweils der Punkt  $P_n$  ist, für den die Anregungsdichten berechnet werden sollen. Dann läßt sich die Integration

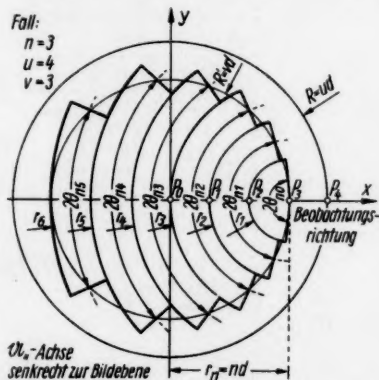


Abb. 5. Unterteilung des kugelförmigen Integrationsvolumens in Abb. 4

über  $\rho$  unmittelbar ausführen. Die obere Integrationsgrenze von  $\theta$  ist noch von  $\varphi$  abhängig. Doch lassen sich die Integrale elementar lösen. Zunächst sollen die Formeln zur Berechnung der Anregungsdichten in verschiedenen Punkten  $P_n$  der Ebene senkrecht zur Kugelachse  $a_{||}$  durch den

<sup>11)</sup> R. Seiwert, Ann. Physik [6] 17, 371 (1956).

<sup>12)</sup> R. Seiwert, Ann. Physik [6] 18, 35 (1956).

Kugelmittelpunkt ( $\theta_0 = 90^\circ$ ) abgeleitet werden. Die Punkte  $P_n$  sollen einen Abstand  $r_n = n d$  vom Kugelmittelpunkt haben, und weiter soll wieder  $R = u d$  und  $R' = v d$  sein; dabei sind  $n$ ,  $u$  und  $v$  ganze Zahlen. Für die Berechnung des Polarisationsgrades interessieren nicht die absoluten, sondern nur die relativen Anregungsdichten. Daher kann  $\tau s_1^\pi(r) = 1$  für  $r \leq R' = v d$  gesetzt werden; für  $R' < r \leq R$  ist  $\tau s_1^\pi(r) = 0$ . Da die primäre Anregung nur mit  $\pi$ -Licht erfolgen soll, ist  $\tau s_1^{\sigma^+}(r) = \tau s_1^{\sigma^-}(r) = 0$ . Das Gleichungssystem I, 10\*, das als Grundlage für die Berechnungen dient, kann dadurch vereinfacht werden, daß die Anregungsdichten für die Rotatoren mit verschiedenem Umlaufsinn nicht getrennt ermittelt zu werden brauchen. (Wie aus den Formeln in Teil I hervorgeht, ist  $V_{\sigma^+\pi} = V_{\sigma^-\pi}$  und  $V_{\sigma^+\sigma} = V_{\sigma^-\sigma}$ .) Man erhält dann für die primären und sekundären Anregungsdichten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} n_1^\pi(r_n) &= V_{\pi\pi} & n_1^\sigma(r_n) &= 0 \\ &\text{für } r_n \leq R' & &\text{für } R' < r_n \leq R \end{aligned} \quad (10^*)$$

$$\begin{aligned} n_1^\sigma(r_n) &= V_{\pi\sigma} & n_1^\pi(r_n) &= 0 \\ n_2^\pi(r_n) &= V_{\pi\pi} [V_{\pi\pi} \cdot G_{\pi\pi}(r_n) + V_{\pi\sigma} \cdot G_{\sigma^+\pi}(r_n)] \\ &\quad + V_{\sigma^+\pi} [V_{\pi\pi} \cdot G_{\pi\sigma}(r_n) + V_{\pi\sigma} \cdot G_{\sigma^+\sigma}(r_n)] \\ n_2^\sigma(r_n) &= V_{\pi\sigma} [V_{\pi\pi} \cdot G_{\pi\pi}(r_n) + V_{\pi\sigma} \cdot G_{\sigma^+\pi}(r_n)] \\ &\quad + V_{\sigma^+\sigma} [V_{\pi\pi} \cdot G_{\pi\sigma}(r_n) + V_{\pi\sigma} \cdot G_{\sigma^+\sigma}(r_n)]. \end{aligned}$$

Die Größen  $G_{\alpha\beta}(r_n)$  ergeben sich durch Auswertung der Integrale  $B_2^{\alpha\beta}(r)$  (Gl. I, 12); dabei ist  $G_{\sigma^+\pi} = G_{\sigma^-\pi}$  und  $G_{\sigma^+\sigma} = G_{\sigma^-\sigma}$ . Das Integrationsvolumen, die Kugel mit dem Radius  $R'$ , wird in der oben angegebenen Weise unterteilt. Die einzelnen Teilintegrale sind Produkte einer Funktion von  $r$  und einer Funktion von  $\theta_{nr}$ <sup>13</sup>). Man erhält, wie sich leicht nachprüfen läßt:

$$G_{\alpha\beta}(r_n = n d) = \sum_{v=p}^{v=n-1} \left[ e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} r d} - e^{-\frac{k_D}{\sqrt{2}} (v+1)d} \right] I_{\alpha\beta}^{nv}. \quad (11)$$

Dabei ist:  $p = 0$  für  $n \leq v$   
 $p = n - v$  für  $n > v$ .

Für  $I_{\alpha\beta}^{nv}$  ergibt sich

$$\text{für } (n + v) \leq v - 1 \quad I_{\pi\pi}^{nv} = 0,8 \quad (12a)$$

$$I_{\pi\sigma}^{nv} = 2 I_{\sigma^+\pi}^{nv} = 0,2 \quad (12b)$$

$$I_{\sigma\sigma}^{nv} = 0,9 \quad (12c)$$

und für  $(n - v) \geq v$

$$I_{\pi\pi}^{nv} = \frac{1}{160} [64 - 45 C_{nv} - 10 C_{nv}^3 - 9 C_{nv}^5] \quad (13a)$$

$$I_{\pi\sigma}^{nv} = 2 I_{\sigma^+\pi}^{nv} = 2 I_{\sigma^-\pi}^{nv} = \frac{1}{160} [16 - 15 C_{nv} - 10 C_{nv}^3 + 9 C_{nv}^5] \quad (13b)$$

$$I_{\sigma^+\sigma}^{nv} = I_{\sigma^-\sigma}^{nv} = \frac{1}{320} [144 - 165 C_{nv} + 30 C_{nv}^3 - 9 C_{nv}^5] \quad (13c)$$

<sup>13</sup>) Die Integrationsgrenzen für  $\theta$  sind  $\pi/2$  und  $\arcsin \frac{\cos \theta_{nr}}{\cos \varphi}$ , für  $\varphi \geq \theta_{nr}$  und 0; dann muß zur Erfassung des gesamten Integrationsvolumens noch ein Faktor 4 hinzutreten.

<sup>14</sup>) Aus diesen Gln. (13a-c) ergeben sich auch die vorhergehenden Gln. (12a-c) mit  $C_{nv} = \cos \theta_{nv} = -1$ , wie zu erwarten ist.



Hierbei ist:

$$C_{nv} = \cos \theta_{nv} = 2 \cos^2 \frac{\theta_{nv}}{2} - 1$$

$$= \frac{(2n + 2v + 2v + 1)(2n - 2v + 2v + 1)}{4n(2v + 1)} - 1^{15}). \quad (14)$$

Auch für die Berechnung der Anregungsdichten in Punkten  $P_n^a$  längs der Kugelachse  $a_{||}$  besitzen die Gln. (11), (12a-c) und (14) Gültigkeit. Nur die Gln. (13a-c) sind durch folgende zu ersetzen:

$$^a I_{\pi\pi}^{nv} = \frac{1}{20} [8 - 15 C_{nv} + 10 C_{nv}^3 - 3 C_{nv}^5] \quad (13d)$$

$$^a I_{\pi\sigma}^{nv} = 2 ^a I_{\sigma\pi}^{nv} = 2 ^a I_{\sigma\pi}^{nv} = \frac{1}{20} [2 - 5 C_{nv}^3 + 3 C_{nv}^5] \quad (13e)$$

$$^a I_{\sigma\sigma}^{nv} = ^a I_{\sigma\sigma}^{nv} = \frac{1}{40} [18 - 15 C_{nv} - 3 C_{nv}^5]. \quad (13f)$$

Die Berücksichtigung der Anregungsdichten der dritten und der höheren Ordnungen erfolgt in ähnlicher Form wie in Abschn. 2. Sie werden für Punkte  $P$  mit  $r_m = m d \approx 1/\sqrt{2} R'$  berechnet<sup>16</sup>). Es wird dabei angenommen, daß die Anregungsdichten innerhalb der Kugel mit dem Radius  $R'$  konstant sind und die gleichen Werte besitzen wie die Anregungsdichten in den Punkten mit  $r_m$ .

Dann lautet das Gleichungssystem für die Anregungsdichten höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} n_i^{\pi}(r_m) &= V_{\pi\pi} [n_{i-1}^{\pi} \cdot G_{\pi\pi}(r_m) + n_{i-1}^{\sigma} \cdot G_{\sigma\pi}(r_m)] \\ &\quad + V_{\sigma\pi} [n_{i-1}^{\pi} \cdot G_{\pi\sigma}(r_m) + n_{i-1}^{\sigma} \cdot G_{\sigma\sigma}(r_m)] \\ n_i^{\sigma}(r_m) &= V_{\pi\sigma} [n_{i-1}^{\pi} \cdot G_{\pi\sigma}(r_m) + n_{i-1}^{\sigma} \cdot G_{\sigma\pi}(r_m)] \\ &\quad + V_{\sigma\sigma} [n_{i-1}^{\pi} \cdot G_{\pi\sigma}(r_m) + n_{i-1}^{\sigma} \cdot G_{\sigma\sigma}(r_m)]. \end{aligned} \quad (15*)$$

Die Korrekturfaktoren ergeben sich wieder gemäß den Gln. (7a) und (7b). Durch Multiplikation der sekundären Anregungsdichten mit den Korrekturfaktoren erhält man die korrigierten Werte  $n_{\pi}^{\pi}(r_n)$  und  $n_{\pi}^{\sigma}(r_n)$ . Die Fluoreszenzlichtströme  $\Phi_{||}$  und  $\Phi_{\perp}$  lassen sich mit Hilfe der entsprechend der hier vorliegenden primären Anregung mit  $\pi$ -Licht abgeänderten Gln. (8a) und (8b) berechnen. Der Polarisationsgrad ist hier

$$P = \frac{\Phi_{||} - \Phi_{\perp}}{\Phi_{||} + \Phi_{\perp}}. \quad (16)$$

<sup>15</sup> Die Berechnung von  $\theta_{nv}$  erfolgt in derselben Weise wie die von  $\varphi_{nv}$  [Gl. (5b)].

<sup>16</sup> Man könnte erwarten, daß die Anregungsdichten für Punkte mit dem gleichen Abstand  $r_m$  vom Kugelmittelpunkt, aber einem anderen „ $\theta_0$ “, also z. B. die Punkte auf der Kugelachse  $a_{||}$  ( $\theta_0 = 0^\circ$  und  $180^\circ$ ), wesentlich von den Anregungsdichten in den Punkten  $P(r_m, \theta_0 = 90^\circ)$  (sonst angewandte Kurzschreibweise  $P_m$  oder  $P(r_m)$ ) abweichen. Das ist auch dann der Fall, wenn  $R' < R$  ist, wie sich gezeigt hat. Unter der Bedingung  $\frac{1}{2} R < R' < R$ , die bei den späteren Rechnungen erfüllt ist, stimmen aber die Werte für die Anregungsdichten in Punkten mit gleichem  $r_m$  und verschiedenem  $\theta_0$  gut genug überein, so daß bei der Ermittlung der Anregungsdichten höherer Ordnung nur für die Punkte  $P(r_m, \theta_0 = 90^\circ)$  berechnet zu werden brauchen.



Damit die zu berechnenden Werte für den Polarisationsgrad mit den Ergebnissen verglichen werden können, die die Verfasser früher<sup>6)</sup> für die Natrium-Resonanzfluoreszenz erhalten hatten, soll  $R = 0,8$  cm und  $R' = 0,6$  cm gewählt werden. Für das Durchlässigkeitsvermögen wird wieder die Näherung bei geringer Absorption [Gl. (1)] verwendet. Nun tritt aber dadurch eine Schwierigkeit auf, daß die  $D$ -Linien sich ja aus einzelnen, sich überlagernden Hyperfeinstrukturlinien zusammensetzen, die durch den Doppler-Effekt verbreitert sind (Halbwertsbreite  $\Delta\nu_D$ ). Die Hyperfeinstrukturaufspaltung des  $^2S_{1/2}$ -Terms ist wesentlich größer als die des  $^2P_{1/2}$ - bzw. des  $^2P_{3/2}$ -Terms<sup>17)</sup>, so daß jeweils zwei bzw. drei der vier bzw. sechs Linien zu einer resultierenden Komponente zusammengefaßt werden können. In beiden Fällen ist das Verhältnis der Intensitäten der kurzwelligeren und der langwelligeren resultierenden Komponente  $\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$ . Nach Milne<sup>18)</sup> muß

$$\int_0^\infty k_\nu d\nu = \frac{\lambda_0^2}{8\pi} \frac{g_2}{g_1} \frac{N}{\tau} \quad (17)$$

( $\lambda_0$  Wellenlänge in der Linienmitte,  $\tau$  mittlere Lebensdauer des angeregten Zustands,  $N$  Teilchendichte des Gases,  $g_1$  und  $g_2$  statistische Gewichte des Grundzustands und des angeregten Zustands)

sein, ganz unabhängig von der Verbreiterung und Aufspaltung der Resonanzlinie. Für den Absorptionskoeffizienten der durch Doppler-Effekt verbreiterten Linie erhält man unter Benutzung dieser Gleichung

$$k_D = \frac{1}{\Delta\nu_D} \left( \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \frac{g_2}{g_1} \frac{N}{\tau} \right). \quad (18)$$

Ersetzt man nun die aus der Überlagerung der Hyperfeinstrukturkomponenten entstandene Linie durch eine Linie, die nur durch den Doppler-Effekt verbreitert ist, die aber in der Linienmitte ein  $k_{D \text{ eff}} = \frac{5}{8} k_D$ , also den Wert für die intensivere resultierende Komponente besitzt, so muß nach Gl. (18)  $\Delta\nu_{D \text{ eff}} = \frac{8}{5} \Delta\nu_D$  sein. Wenn man zeichnerisch die in ihrer Form berechnete  $D_1$ - oder  $D_2$ -Linie durch eine nur durch den Doppler-Effekt verbreiterte Linie zu verwandeln versucht, so erhält man tatsächlich Linien, die eine Halbwertsbreite von etwa  $\frac{8}{5} \Delta\nu_D$  besitzen. (Dies muß als rein zufällig angesehen werden, da bei einer größeren Hyperfeinstrukturaufspaltung und dem gleichen Verhältnis der Komponenten ein solcher Zusammenhang nicht bestehen kann.) Der Absorptionskoeffizient  $k_D$  in Gl. (1) ist nun durch  $\frac{5}{8} k_D$

zu ersetzen bzw.  $k^*$  gleich  $\frac{5}{8\sqrt{2}} k_D$  zu setzen, wobei dieses  $k_D$  nach Gl. (18) für die  $D_1$ - bzw.  $D_2$ -Linie erhalten wird. Berechnet man nun nach dieser Methode das Durchlässigkeitsvermögen bei  $T = 560$  °K für verschiedene  $\varrho$ -Werte und vergleicht die Ergebnisse mit früheren Rechnungen, die einer der Verfasser<sup>12)</sup>

<sup>17)</sup> H. A. Bauer, Grundlagen der Atomphysik (2. Aufl.), S. 192, Wien 1943; H. Kopfermann, Kernmomente, S. 85, Frankfurt/Main 1956.

<sup>18)</sup> E. A. Milne, Mon. Not. Roy. Ast. Soc. 85, 117 (1924).

unter der genauen Berücksichtigung der Linienform durchgeführt hat, so zeigt sich noch für  $k^* \varrho = 1$  eine Übereinstimmung auf etwa 5%. Damit hat sich erwiesen, daß die hier für das Durchlässigkeitsvermögen angegebene Näherung brauchbar ist.

Die benötigten Werte für  $V_{\alpha\beta}$ <sup>19)</sup> sind in Tab. 2 und die für die beiden D-Linien schließlich erhaltenen Polarisationsgrade in Tab. 3 zusammengestellt.

Tabelle 2

$V_{\alpha\beta}$	Na $D_1$	Na $D_2$
$V_{\pi\pi}$	0,333333	0,423333
$V_{\pi\sigma}$	0,666667	0,576667
$V_{\sigma^+\pi} = V_{\sigma^-\pi}$	0,333333	0,288333
$V_{\sigma^+\sigma^-} = V_{\sigma^-\sigma^+}$	0,666667	0,711667

Tabelle 3

$k^*$ [cm <sup>-1</sup> ] (Na $D_2$ )	$k_D$ [cm <sup>-1</sup> ] (Na $D_2$ )	$N^{20)}$ [Na-Atome] cm <sup>3</sup>	$p$ [Torr]	$T$ [°C]	$P$ [%]		
					Na $D_1$	Na $D_2$	Na ( $D_1 + D_2$ )
0					0	18,98	13,65
0,5	1,13	$1,08 \cdot 10^{11}$	$4,72 \cdot 10^{-6}$	148,2	0	15,0	10,0
1,0	2,26	$2,19 \cdot 10^{11}$	$9,80 \cdot 10^{-6}$	158,6	0	12,3	7,6

Eine gewisse Unsicherheit entsteht noch einmal bei der Berechnung des Polarisationsgrades, der sich für  $D_1$  und  $D_2$  zusammen ergibt. Zwar ist das Verhältnis der Intensitäten der beiden zur Primäranregung benutzten Spektrallinien  $g_1 = I_{D_1}/I_{D_2}$ , das bei den Versuchen der Verfasser vorlag, bekannt, aber fraglich ist noch, welcher Wert für das Verhältnis  $g = s_{D_1}^{\pi}/s_{D_2}^{\pi}$  einzusetzen ist. Da die  $D_2$ -Linie eine doppelt so große Oszillatorenstärke besitzt wie die  $D_1$ -Linie, ist bei schwacher Absorption die in einer Gasschicht absorbierte  $D_2$ -Strahlung  $A_{D_2}$  etwa doppelt so groß wie die absorbierte  $D_1$ -Strahlung  $A_{D_1}$ , falls  $I_{D_1} = I_{D_2}$  ist. Wenn aber eine sehr große Teilchendichte und damit eine sehr starke Absorption vorliegt, so werden sich die innerhalb der Schicht absorbierten Strahlungen der beiden Linien (bei  $g_1 = 1$ ) nur noch wenig unterscheiden. Die auf ihren Polarisationsgrad untersuchte Fluoreszenz kommt aus einer Schicht einer gewissen Dicke  $d$ . Es läßt sich nun abschätzen,

<sup>19)</sup> Die Größen  $a_{\alpha\beta}$ , die zur Berechnung der  $V_{\alpha\beta}$  benötigt werden, können mit Hilfe der Formeln von J. H. Van Vleck [Proc. Nat. Acad. Sci. **11**, 612 (1925)] und A. C. G. Mitchell [Physic. Rev. **40**, 964 (1932)] ermittelt werden.

<sup>20)</sup> Für die Berechnung des Dampfdruckes wurde die Gleichung

$$\lg p_{(\text{Torr})} = -\frac{26244}{4,573} \cdot \frac{1}{T} - 1,178 \lg T + 11,402$$

verwendet, die von E. Thiele [Ann. Physik **14**, 937 (1932)] für den Partialdruck der Na-Atome angegeben worden ist. Die mit ihrer Hilfe berechneten Werte unterscheiden sich kaum von den Werten, die nach einer anderen, ebenfalls von Thiele angegebenen Dampfdruckformel erhalten werden; diese Formel gilt für den gesamten Natrium-Dampfdruck und soll für tiefere Temperaturen besonders geeignet sein. Sie wurde an anderer Stelle<sup>5)</sup> von den Verfassern benutzt. Die Teilchendichte ergibt sich auf Grund der Relation  $N = p/kT$ .

wie groß das Verhältnis  $g_{II} = A_{D_1} : A_{D_2} = [1 - D_{D_1}(d)] / [1 - D_{D_2}(d)]$  ist. Dann läßt sich das Verhältnis  $g = g_I \cdot g_{II}$  angeben, das als Gewichtungsfaktor in die Formel

$$P = \frac{\Phi_{||}^{\rho_2} - \Phi_{\perp}^{\rho_2}}{\Phi_{||}^{\rho_2} + \Phi_{\perp}^{\rho_2} + 2g\Phi_{||}^{\rho_1}}$$

( $\Phi_{||}^{\rho_1} = \Phi_{\perp}^{\rho_1}$ ) für den Polarisationsgrad der ( $D_1 + D_2$ )-Fluoreszenz eingeht. Bei den früheren Versuchen der Verfasser war  $g_I = 0,833$ ;  $d$  wurde gleich  $2R'$  gesetzt und so  $g_{II} = 0,5$  für  $N \rightarrow 0$ ,  $g_{II} = 0,59$  für  $N = 1,08 \cdot 10^{11}$  Na-Atome/cm<sup>3</sup> und  $g_{II} = 0,67$  für  $N = 2,19 \cdot 10^{11}$  Atome/cm<sup>3</sup> erhalten. Die  $P_{D_1+D_2}$ -Werte sind in die letzte Spalte der Tab. 3 eingetragen worden.

Bisher ist noch nicht in Betracht gezogen worden, daß die zur Primär-anregung benutzten  $D$ -Linien sicher schon durch die Absorption innerhalb der Spektrallampe eine gewisse für  $D_1$  und  $D_2$  verschiedene Abweichung von der ursprünglichen Linienform besessen haben; das müßte sich so auswirken, daß die Absorption innerhalb des Resonanzgefäßes nicht dieselbe ist wie bei der Einstrahlung der ursprünglichen  $D$ -Linien und daß hierdurch auch der Polarisationsgrad bei sehr kleinen Teilchendichten affiziert wird. Bei den Experimenten bei sehr geringen Drucken sind nun Meßwerte für den Polarisations-

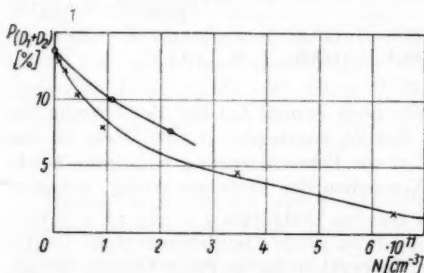


Abb. 6. Polarisationsgrad der Na-Resonanzfluoreszenz als Funktion der Teilchendichte bei  $\pi$ -Anregung. —○— theoretische Kurve, —×— experimentelle Kurve von Ermisch und Seiwert<sup>5)</sup>

förmigen Dampfvolmens und einer gleichförmigen Anregungsdichte innerhalb einer konzentrischen Kugel mit dem gleichen Durchmesser, den der anregende Lichtstrahl bei den Experimenten besaß, die tatsächlichen Versuchsbedingungen doch nur ungenauer erfaßt werden konnten.

Wenn  $R'$  verhältnismäßig klein gegenüber  $R$  ist, wird das Integrationsvolumen zweckmäßigerweise anders unterteilt, als das oben geschehen ist. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden, sondern es soll nur noch das Ergebnis für  $R' = 0,2$  cm,  $R = 0,8$  cm und  $k^* = 1$  mitgeteilt werden:  $P_{D_1} = 17,0\%$ . Vergleicht man hiermit das Resultat, das ebenfalls für  $R = 0,8$  cm und  $k^* = 1$ , aber für  $R' = 0,6$  cm erhalten worden ist, nämlich  $P_{D_1} = 12,3\%$ , so erkennt man sehr deutlich den wesentlichen Einfluß der Geometrie der Versuchsanordnung auf den Polarisationsgrad des aus dem Dampf austretenden Fluoreszenzlichts. Warum der große Unterschied in den

Werten für den Polarisationsgrad auftritt, läßt sich leicht folgendermaßen erklären: Wenn  $R'$  klein ist, so sind die sekundären Anregungsdichten auch klein und die dementsprechend schwache nach außen gelangende sekundäre Fluoreszenz hat daher gegenüber der primären Fluoreszenzstrahlung nur wenig Einfluß auf den Polarisationsgrad. Wenn  $R'$  sehr klein gegenüber  $R$  ist, wirkt sich außerdem die Richtungsdepolarisation nur geringfügig auf die Anregungsdichten in Punkten mit  $\vartheta_0 = 90^\circ$ , also auf der senkrecht zu  $a_{||}$  liegenden Ebene durch den Kugelmittelpunkt aus; denn in diesen Punkten wird hauptsächlich solche primäre Fluoreszenzstrahlung absorbiert, die unter einem Winkel  $\vartheta$  emittiert worden ist, der nur wenig von  $90^\circ$  abweicht. Falls aber  $R'$  fast so groß wie  $R$  ist, so besitzt die sekundäre Fluoreszenzstrahlung ein größeres Gewicht gegenüber der primären — selbst die Fluoreszenzstrahlungen höherer Ordnung müssen noch berücksichtigt werden — und die Richtungsdepolarisation spielt eine wesentlich wichtigere Rolle.

#### 4. Richtungs- und Reemissionsdepolarisation bei $\sigma^+$ -Anregung

Bei der Ermittlung der Werte für den Polarisationsgrad in den beiden bisher behandelten Fällen wurden nebenher auch Berechnungen unter weitergehenden Vereinfachungen durchgeführt und die Ergebnisse mit den in Tab. 1 und 3 angegebenen Resultaten verglichen. Dabei zeigte sich folgendes:

1. Die Fluoreszenzstrahlungen höherer Ordnung durften schon bei verhältnismäßig kleinen  $k_D$ -Werten (z. B. 0,4) nicht mehr unberücksichtigt bleiben.
2. Wenn die Anregungsdichten  $n_i^r$  und  $n_i^s$  nur für die Punkte mit  $r = 0$  berechnet wurden und dabei angenommen wurde, daß die Anregungsdichten innerhalb des Zylinders bzw. der Kugel mit dem Radius  $R'$  konstant und gleich den Werten in den Punkten mit  $r = 0$  sind, so waren die aus den  $n_i^r$ - und  $n_i^s$ -Werten ermittelten Polarisationsgrade nur unwesentlich größer als die nach den genaueren Methoden erhaltenen. Es soll hier keineswegs behauptet werden, daß dies immer der Fall ist. Das kurz charakterisierte Verfahren dürfte sich jedoch dann gut für eine Abschätzung des Polarisationsgrades verwenden lassen, wenn ähnliche geometrische Verhältnisse vorhanden sind, wie sie den Berechnungen in Abschn. 2 und 3 zugrunde gelegen haben, wenn also  $\frac{1}{2} R < R' < R$  ist.

Die Richtungs- und Reemissionsdepolarisation bei  $\sigma^+$ -Anregung soll jetzt in dieser Weise berechnet werden. Entsprechende Experimente liegen von Hanle<sup>6)</sup> vor; dabei wurde mit  $\sigma$ -Licht angeregt. Die Werte für den Polarisationsgrad bei  $\sigma^+$ - und  $\sigma$ -Anregung sind die gleichen. Es fehlen zwar die genauen Angaben über die Geometrie der Versuchsanordnung, die für eine exakte Berücksichtigung der Strahlungsdiffusion erforderlich wären, doch dürfte eine Kugel mit  $R' = 0,5$  cm als Integrationsvolumen wahrscheinlich den tatsächlichen experimentellen Bedingungen nahekommen.

Die Gleichungssysteme I, 10\*, I, 11a\* und I, 11b\* können unmittelbar für die Berechnung des Polarisationsgrades verwendet werden. Da nur mit  $\sigma^+$ -Licht angeregt wird, muß  $C_1^r = 0$  und  $C_1^s = 0$  gesetzt werden. Weiter wird  $C_1^{\sigma^+} = 1$  gewählt; denn der absolute Betrag des eingestrahnten Lichtstroms ist bei der Ermittlung des Polarisationsgrades ohne Interesse. Da bei dem vereinfachten Rechenverfahren angenommen wird, daß die Anregungsdichten

der verschiedenen Ordnungen innerhalb der Kugel mit dem Radius  $R'$  konstant sind, nehmen die Integrale  $B_i^{\alpha\beta}$  [s. Gl. (I, 12)] folgende Form an:

$$B_i^{\alpha\beta} = n_{i-1}^{\alpha} \int W_{\alpha\beta}(\varrho, \vartheta, \varphi) \varrho^2 d\varrho \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = n_{i-1}^{\alpha} H_{\alpha\beta} \quad (20)$$

mit

$$H_{\alpha\beta} = \left(1 - e^{-k^* R'}\right) \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} f_{\alpha\beta}(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \left(1 - e^{-k^* R'}\right) I_{\alpha\beta}. \quad (21)$$

Die Werte von  $I_{\alpha\beta}$  sind gemeinsam mit den Werten von  $V_{\alpha\beta}$ <sup>19)</sup> in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4

$I_{\alpha\beta}$		$V_{\alpha\beta}$	Na $D_1$	Na $D_2$
$I_{\pi\pi}$	0,8	$V_{\pi\pi}$	0,333333	0,423333
$I_{\pi\sigma^+} = I_{\pi\sigma^-}$	0,1	$V_{\pi\sigma^+}$	0,333333	0,288333
$I_{\sigma^+\pi} = I_{\sigma^-\pi}$	0,1	$V_{\sigma^+\pi}$	0,333333	0,288333
$I_{\sigma^+\sigma^+} = I_{\sigma^-\sigma^-}$	0,6	$V_{\sigma^+\sigma^+}$	0,458333	0,564167
$I_{\sigma^+\sigma^-} = I_{\sigma^-\sigma^+}$	0,3	$V_{\sigma^+\sigma^-}$	0,208333	0,147500

Wenn das Fluoreszenzlicht untersucht wird, das gerade in entgegengesetzter Richtung zur Einstrahlungsrichtung den Na-Dampf verläßt, so ist der Polarisationsgrad

$$P_{180^\circ} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{\sigma^+} - \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma^-}}{\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{\sigma^+} + \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma^-}} \quad (22)$$

Da bei den Hanleschen Experimenten die Richtung des beobachteten Fluoreszenzlichts und die Einstrahlungsrichtung einen Winkel von  $150^\circ$  gebildet haben, ist der Polarisationsgrad für  $|\chi| = 0$  in diesem Fall:

$$\begin{aligned} P_{150^\circ} &= \frac{\cos^2 30^\circ \left( \sum_{i=1}^{\infty} n_i^{\sigma^+} - \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma^-} \right)}{\frac{1}{2} (1 + \cos^2 30^\circ) \left( \sum_{i=1}^{\infty} n_i^{\sigma^+} + \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma^-} \right) + \sin^2 30^\circ \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\pi}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{\sigma^+} - \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma^-}}{\frac{7}{6} \left( \sum_{i=1}^{\infty} n_i^{\sigma^+} + \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\sigma^-} \right) + \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\infty} n_i^{\pi}} \end{aligned} \quad (23)$$

Da das Intensitätsverhältnis der beiden  $D$ -Linien in der Veröffentlichung von Hanle nicht angegeben ist, können nur die beiden Polarisationsgrade der getrennten Linien berechnet werden. Für  $k^*$  wurden dieselben Werte wie in Abschn. 3 gewählt, dort sind die genaueren Angaben über die Zusammenhänge zwischen  $D$ ,  $k^*$ ,  $k_D$ ,  $N$ ,  $p$  und  $T$  zu finden. Die verschiedenen für den

Polarisationsgrad errechneten Werte<sup>21)</sup> sind in Abb. 7 eingetragen. Es zeigt sich deutlich, daß der Polarisationsgrad beträchtlich absinkt, wenn der Winkel zwischen der Einstrahlungsrichtung und der Fortpflanzungsrichtung des beobachteten Fluoreszenzlichts von  $180^\circ$  auf  $150^\circ$  herabgesetzt wird. Die Meßkurve von Hanle ist zum Vergleich in Abb. 7 wieder gegeben worden<sup>22)</sup>. Eine bessere Übereinstimmung war bei der etwas willkürlichen Wahl der Größe des Integrationsvolumens und den sonstigen Vereinfachungen nicht zu erwarten; sie hätte sich nur rein zufällig ergeben können.

Zu der Meßkurve ist folgendes zu bemerken: Wenn man die Meßpunkte verbindet, wie das Hanle getan hat, führt eine Extrapolation bei kleinen Teilchendichten zu Polarisationsgraden, die theoretisch nicht möglich sind, und bei höheren Teilchendichten bleibt der Polarisationsgrad im Bereich einer Zehnerpotenz von  $N$  ( $4 \cdot 10^{10}$ – $4 \cdot 10^{11}$ ) nahezu konstant, was nicht verständlich ist. Wie aus einer Tabelle in der Arbeit von Hanle ersichtlich ist, entsprach einer Änderung der Nicolstellung um  $8^\circ$  eine Änderung des Polarisationsgrades um 26%; die Nicolstellungen sind stets in vollen Graden angegeben. Schon daraus ist ersichtlich, daß den Meßwerten sicher eine gewisse Ungenauigkeit anhaftet, was bei der geringen Intensität der Fluoreszenzstrahlung bei tieferen Temperaturen schwer zu vermeiden ist.

### 5. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

In Teil I ist die depolarisierende Wirkung der Strahlungsdiffusion analysiert worden; es wurde gezeigt, daß bei einer normalen Zeeman-Aufspaltung eine Richtungsdepolarisation und sonst zusätzlich noch eine Reemissionsdepolarisation auftritt. Dann wurden allgemeine Gleichungen abgeleitet, die die Berechnung des Polarisationsgrades unter Berücksichtigung der Strahlungsdiffusion gestatten. In Teil II sind diese Gleichungen nun auf drei spezielle Fälle angewendet worden, für die experimentelle Ergebnisse vorliegen. Um den Umfang der numerischen Rechnungen in sinnvollen Grenzen

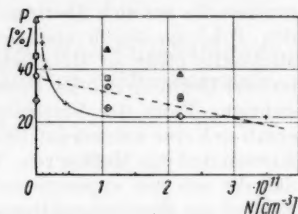


Abb. 7. Polarisationsgrad der Na-Resonanzfluoreszenz als Funktion der Teilchendichte bei  $\sigma^+$ - oder  $\sigma^-$ -Anregung. Berechnete Werte:

○  $P_{180^\circ}$  und ◇  $P_{150^\circ}$  für Na  $D_1$ ,  
 △  $P_{180^\circ}$  und □  $P_{150^\circ}$  für Na  $D_2$ .  
 Meßwerte von Hanle<sup>6)</sup>: + für Na  $D_1$  + Na  $D_2$  (nächster Meßpunkt:  $P = 0$  für  $N = 2,1 \cdot 10^{12}$  Na-Atome/cm<sup>3</sup>). — die von Hanle durch die Meßpunkte gelegte Kurve. --- für  $\bar{P}_{150^\circ}$  eingezeichnete Gerade<sup>21)</sup>

<sup>21)</sup> In die Abb. 7 ist noch eine Gerade eingezeichnet, die die Abhängigkeit eines mittleren Polarisationsgrades

$$\bar{P}_{150^\circ} = \frac{1}{2} [P_{150^\circ}(\text{Na } D_1) + P_{150^\circ}(\text{Na } D_2)]$$

von der Teilchendichte (ungefähr) darstellt.

<sup>22)</sup> Die Dampfdrucke wurden nach der oben<sup>20)</sup> angeführten Dampfdruckformel auf Grund der von Hanle angegebenen Temperaturen neu berechnet. Die Teilchendichten wurden dann wieder mit Hilfe der Relation  $N = p/kT$  erhalten.



zu halten, wurden für die Durchführung der Integrationen zweckmäßige Integrationsbereiche gewählt und angenommen, daß in ihnen die primären Anregungsdichten konstant sind. Für das Durchlässigkeitsvermögen wurde eine Näherung benutzt, die für schwache Absorption Gültigkeit besitzt. Außerdem mußten die aus sich überlagernden Hyperfeinstrukturkomponenten bestehenden *D*-Linien durch einfache Doppler-Linien ersetzt werden, damit die Rechnung nicht zu kompliziert wurde. Der Einfluß der Anregungsdichten höherer Ordnung auf den Polarisationsgrad wurde nur näherungsweise berücksichtigt. Trotz der Vereinfachungen, Näherungen und Vernachlässigungen ergab sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den berechneten Kurven und den Meßkurven. Durch dieses Resultat wurde nicht nur bewiesen, daß die aus den experimentellen Ergebnissen gezogene Folgerung über den Einfluß der Strahlungsdiffusion auf die Polarisation der Resonanzfluoreszenz tatsächlich richtig ist — das wurde zunächst mit den Rechnungen bezweckt —, sondern es zeigte sich auch, daß es mit einem erträglichen Aufwand an Rechenarbeit möglich ist, Polarisationsgrade für bestimmte Versuchsbedingungen mit einer gewissen, wenn auch nicht gerade hohen Genauigkeit zu erhalten. Wollte man diese steigern, so würde sich dabei der Umfang der numerischen Rechnungen wesentlich vergrößern und nur noch mit elektronischen Rechenautomaten zu bewältigen sein. Ein solcher Aufwand wäre aber nur sinnvoll, wenn die Geometrie der Anordnung bei den Experimenten ganz genau festgelegt, auch noch die Form der eingestrahlten Linien bestimmt und die Meßgenauigkeit bei niedrigen Dampfdichten erhöht würde. Bei der Wahl der geometrischen Verhältnisse der Anordnung sollte dann etwas Rücksicht darauf genommen werden, daß gerade hierdurch die Rechnungen erleichtert werden können.

Von großem Interesse sind die depolarisierenden Stöße und ihre Abhängigkeit von der Stärke der Zeeman-Aufspaltung der Terme. Hier ist es zweckmäßig, zunächst die depolarisierenden Stöße mit Fremdgasatomen zu untersuchen. Dann kann die Teilchendichte des betreffenden Gases sehr niedrig und der Fremdgasdruck entsprechend höher gewählt werden, so daß der Einfluß der Strahlungsdiffusion auf den Polarisationsgrad wegfällt, der nur schwer genau zu bestimmen ist, wie die obigen Berechnungen gezeigt haben. Derartige Versuche zur Natrium-Resonanzfluoreszenz wurden bereits früher von Hanle<sup>6)</sup> ausgeführt. Wegen der komplizierten Zeeman-Aufspaltung infolge der Hyperfeinstruktur des Natriums ist es jedoch besser, ein reines Isotop mit dem Kernspin 0 für die Untersuchungen zu wählen, worauf die Verfasser schon in einer früheren Arbeit<sup>6)</sup> hingewiesen haben.

Für die Durchführung zahlreicher numerischer Rechnungen danken wir Frau B. Götting.

Berlin-Adlershof, Institut für Optik und Spektroskopie der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 26. Februar 1959.



# Über die Bestimmung des kritischen Molekülabstandes bei der Konzentrationsdepolarisation der Fluoreszenz

Von C. Bojarski und A. Kawski

## Inhaltsübersicht

Es wird ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des kritischen Molekülabstandes  $R_0$  bei der Konzentrationsdepolarisation der Lumineszenz angegeben, für welchen die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit gleich der Übergangswahrscheinlichkeit von Anregungsenergie ist. Die berechneten Werte von  $R_0$  für Fluorescein bzw. Rhodamin B in Glycerin betragen 55 Å bzw. 63 Å und für Anthracen in Plexiglas 32 Å.

Die Interpretation der Konzentrationsdepolarisation der Fluoreszenz von Lösungen beruht im wesentlichen auf der Theorie der Energiewanderung<sup>1)2)</sup>. Nach Th. Förster<sup>3)</sup> ist für den Energieübergang durch Wechselwirkung infolge der Dispersionskräfte die Übertragungswahrscheinlichkeit der 6. Potenz des Molekülabstandes der beiden beteiligten Moleküle umgekehrt proportional. Für zwei gleichartige Moleküle  $A$  und  $B$  im Abstand  $R_{AB}$  ist nach den Försterschen Rechnungen<sup>3)4)</sup> die Übergangshäufigkeit

$$n_{AB} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{R_0}{R_{AB}} \right)^6, \quad (1)$$

wobei

$$R_0 = \left[ \frac{9 \kappa^2 (\ln 10)^2 c \tau I_{\bar{\nu}}}{16 \pi^4 n^2 N'^2 \bar{\nu}_0^2} \right]^{1/6}, \quad (2)$$

Dabei ist  $\kappa$  eine von der Orientierung der beiden Moleküle abhängige dimensionslose Konstante der Größenordnung 1,  $n$  — der Brechungsindex des Mediums,  $c$  — die Vakuumlichtgeschwindigkeit,  $\tau$  — die mittlere natürliche Fluoreszenzabklingdauer,  $N' = 6,02 \cdot 10^{20}$  die Zahl der Moleküle im Millimol,  $\bar{\nu}_0$  — die Wellenzahl des Elektronenübergangs im Spektrum (Mittelwert zwischen Absorptions- und Fluoreszenzmaximum) in  $\text{cm}^{-1}$  und

$$I_{\bar{\nu}} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\bar{\nu}) \varepsilon(2\bar{\nu}_0 - \bar{\nu}) d\bar{\nu} \quad (3)$$

das Produktintegral des Absorptionsspektrums mit seinem Spiegelbild auf der Wellenzahlskala.  $\varepsilon(\bar{\nu})$  ist der molare dekadische Extinktionskoeffizient.

<sup>1)</sup> J. Perrin, 2<sup>me</sup> conseil de chim. Solvay, Gauthier-Villars, Paris, 1925, S. 322.

<sup>2)</sup> F. Perrin, Ann. physique 17, 283 (1932).

<sup>3)</sup> Th. Förster, Ann. Physik, 2, 55 (1948).

<sup>4)</sup> Th. Förster, Fluoreszenz organischer Verbindungen, Stuttgart, 1951, S. 172—180.

Das Produktintegral ist ein Maß für die gegenseitige Überdeckung des Absorptionsspektrums mit dem zugehörigen Fluoreszenzspektrum. Nach Gl. (1) hat das  $R_0$  die Bedeutung eines „kritischen Molekülabstandes“ der beiden Moleküle, für welchen der Energieübergang die gleiche Häufigkeit  $\frac{1}{\tau}$  wie die der Ausstrahlung des primär angeregten Moleküls besitzt. Für die meisten zähen und festen Lösungsmittel fehlen die erforderlichen Daten zur Berechnung des kritischen Molekülabstandes<sup>4)</sup>. Für Fluorescein in Wasser (dessen Absorptions- und Fluoreszenzspektrum einander stark überdecken) hat Förster aus Gl. (2)  $R_0 = 50 \text{ \AA}$  berechnet und daraus für die kritische Konzentration  $c_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Mol/l}$  erhalten.

In dieser Arbeit wird ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des kritischen Abstandes  $R_0$  bei der Konzentrationsdepolarisation der Fluoreszenz angegeben.

Es werde eine isotrope und zähe (oder feste) Lösung vorausgesetzt, in welcher die Konzentrationsdepolarisation der Lumineszenz stattfindet. Wenn die Konzentration der Fluoreszenzmoleküle bei Voraussetzung gleichmäßiger Verteilung einem gegenseitigen Molekülabstand  $R_0$  entspricht (das heißt, daß die Übergangswahrscheinlichkeit der Elektronenanregungsenergie gleich der Ausstrahlungswahrscheinlichkeit ist), so beträgt der Polarisationsgrad

$$P = \frac{3 P_0}{6 - P_0} \quad (4)$$

$P_0$  ist der Grundpolarisationsgrad<sup>5)</sup> des Fluoreszenzlichtes. Die angeregten fluoreszierenden Moleküle, welche unmittelbar von der primären Lichtstrahlung ihre Elektronenanregungsenergie erhalten haben, werden wir als Moleküle nullter Ordnung, und diejenigen, zu denen die Anregungsenergie von den Molekülen  $(i-1)$ -ter Ordnung überging, als Moleküle  $i$ -ter Ordnung bezeichnen. Wie bekannt, ist der beobachtete Polarisationsgrad des gesamten Lumineszenzlichtes, welcher aus den Partialpolarisationen nullter bis  $i$ -ter Ordnung besteht, definitionsgemäß

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} w_i P_i, \quad (5)$$

wobei

$$w_i = \frac{I_i}{\sum_{n=0}^{\infty} I_n}, \quad (6)$$

und  $I_n$  ist die Intensität der Lichtemission der Moleküle  $n$ -ter Ordnung in der Richtung, auf die sich der Polarisationsgrad  $P$  bezieht. Wegen der Anisotropie der polarisierten Fluoreszenz muß man die Größen  $I_i$ , welche den Ausstrahlungswahrscheinlichkeiten  $S_i$  der einzelnen Übergänge proportional sind, mit  $\frac{2}{3 - P_i}$  multiplizieren<sup>6)</sup>, wo  $P_i$  den Polarisationsgrad des von den Mole-

<sup>5)</sup> Der maximale Fluoreszenzpolarisationsgrad in verdünnter und fester (oder zäher) Lösung.

<sup>6)</sup> S. I. Wawilow, Die Mikrostruktur des Lichtes. Warschau 1953, S. 179.

külen  $i$ -ter Ordnung emittierten Lichtes bezeichnet. Somit gilt

$$I_i = \frac{2}{3 - P_i} \cdot S_i. \quad (7)$$

Zwecks Bestimmung der Ausstrahlungswahrscheinlichkeiten  $S_i$  in der Gl. (7) nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Abstände zwischen beliebigen benachbarten Molekülen untereinander stets gleich  $R_0$  seien. Die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit für die Moleküle nullter Ordnung beträgt  $\frac{1}{2}$ , und für die der Moleküle erster Ordnung  $\frac{1}{4}$  usw. Im allgemeinen Falle betragen die Ausstrahlungswahrscheinlichkeiten der Moleküle  $i$ -ter Ordnung nach allen Richtungen

$$S_i = \frac{1}{2^{i+1}}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Durchwegs wird vorausgesetzt, daß die Übergangswahrscheinlichkeit der Anregungsenergie von einem angeregten Molekül zu den unangeregten benachbarten Molekülen nicht von ihren gegenseitigen Orientierungen abhängt.

Auf Grund von Gln. (7) und (8) können wir nun die Koeffizienten  $w_i$  in Gl. (5) abschätzen. Dazu berechnen wir zuerst den Ausdruck im Nenner der Gl. (6). Mit Rücksicht darauf, daß nach den Berechnungen von Galanin<sup>7)</sup>

$$P_n \ll P_{n-1} \ll \dots \ll P_1 \ll P_0, \quad (9)$$

ergibt sich nach Gln. (7) und (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(3 - P_n)} \approx \frac{1}{3 - P_0} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{3 - P_0} + \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Damit erhalten wir nach Gl. (6) mit Berücksichtigung von Gln. (7), (8) und (10)

$$w_i = \frac{3(3 - P_0)}{2^i(6 - P_0)(3 - P_i)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Wegen  $P_i \ll 3$  und

$$\frac{3 - P_0}{6 - P_0} < \frac{1}{2}, \quad \text{für } P_0 > 0$$

folgt aus Gl. (11):

$$w_i < \frac{1}{2^{i+1}}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (12)$$

Mit Rücksicht auf Gln. (9) und (12), beschränken wir uns in Gl. (5) nur auf das erste Glied. Wir erhalten schließlich mit  $w_0$  aus Gl. (11)

$$P \approx w_0 P_0 = \frac{3 P_0}{6 - P_0}. \quad (4)$$

<sup>7)</sup> M. D. Galanin, Veröff. d. Acad. d. UdSSR, Physik. Inst. 5, 341 (1950).

<sup>8)</sup> Der Polarisationsgrad  $P_1$  der Fluoreszenz der Moleküle erster Ordnung für  $P_0 = \frac{1}{2}$  ist  $\frac{1}{42}$ .

Die Beziehung (4) gibt den Polarisationsgrad, welcher einer solchen Konzentration der Fluoreszenzmoleküle entspricht (bei Voraussetzung einer gleichmäßigen Verteilung), bei der die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit gleich der Übergangswahrscheinlichkeit der Anregungsenergie von einem angeregten Molekül zu den unangeregten benachbarten Molekülen ist. Das Endergebnis stellt trotz der Vernachlässigung aller Glieder außer dem ersten eine gute Annäherung für den Ausdruck (5) dar, weil die Verkleinerung des Endresultates durch die Vernachlässigung der höheren Glieder teilweise durch die Vergrößerung von  $w_0$  infolge der Benutzung der Näherung (10) kompensiert wird<sup>9)</sup>.

Wenn man also aus der experimentellen Depolarisationskurve diejenige Konzentration aufnimmt, welche dem Polarisationsgrad nach Formel (4) entspricht, so erhält man den kritischen Molekülabstand  $R_0$  aus

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n'}} \quad (13)$$

wo  $n'$  die Zahl der Lumineszenzmoleküle pro  $\text{cm}^3$  bedeutet.

Tabelle 1

Stoff	Lösungsmittel	$R_0$ in Å	$c_0 = \frac{n'}{N'}$ in Mol/l
Fluorescein <sup>10)</sup>	Glycerin	55	$2,4 \cdot 10^{-3}$
Rhodamin B <sup>10)</sup>	Glycerin	63	$1,6 \cdot 10^{-3}$
Anthracen <sup>11)</sup>	Plexiglas	32	$1,2 \cdot 10^{-2}$

In der Tab. 1 haben wir die kritischen Abstände und die entsprechenden „kritischen Konzentrationen“ zusammengestellt.

<sup>9)</sup> Für  $P_1 = \frac{1}{42}$  und  $w_1 = \frac{1}{4}$ , verkleinert die Vernachlässigung von  $w_1 \cdot P_1$  den Betrag von  $P$  um 0,006, gleichzeitig wird aber infolge der Näherung (10) der Betrag von  $P$  um 0,001 vergrößert. Im ungünstigsten Falle (wenn  $P_0 = \frac{1}{2}$ ) wird die aus (5) und (4) berechnete Differenz in  $P$  gleich 0,005, was innerhalb der Fehlergrenzen der experimentellen Messung liegt.

<sup>10)</sup> P. P. Pheofilov u. B. Sveshnikov, J. exp. u. theoret. Physik **10**, 1372 (1940).

<sup>11)</sup> A. Kowski, Bull. Acad. Polon. Sci., série sci. math., astr. et phys., **6**, 533 (1958).

Gdańsk (Polen), Technische Hochschule, I. Physikalisches Institut.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. November 1958.

# Thermal and Electrical Conductivities of Rhodium and Iron

By W. R. G. Kemp, P. G. Klemens, and R. J. Tainsh

With 5 Figures

## Inhaltsübersicht

Die elektrische Leitfähigkeit und die Wärmeleitfähigkeit des Rhodiums und des Eisens wurden im Temperaturbereich von 2 bis 90 °K an reinen Proben gemessen. Der Temperaturverlauf der Widerstände wird durch Streuung der *s*-Band-Elektronen innerhalb des *s*-Bandes und in das *d*-Band gedeutet.

## 1. Introduction

The thermal and electrical conductivities of pure metals are best studied on specimens of the lowest attainable residual resistivity, for these yield the maximum information concerning the ideal thermal and electrical resistivities. Over a quarter century ago, Grüneisen and his collaborators measured the conduction properties of a large number of pure samples of different metals (see, for example, references<sup>1-5</sup>) as well as the compilation by Powell and Blanpied<sup>6</sup>). Most of these samples were of remarkably low residual resistivity, indicating high purity and careful treatment. Unfortunately these measurements extended down only to liquid hydrogen temperatures.

After the war, many further measurements on pure metals were published, particularly by Mendelssohn and Rosenberg<sup>7</sup>) and by White and collaborators (for example, references<sup>9-12</sup>). These measurements extended down to liquid helium temperatures and were mostly made on very pure specimens, which had become more readily available in the intervening years.

<sup>1</sup>) E. Grüneisen and E. Goens, Z. Physik **44**, 615 (1927).

<sup>2</sup>) E. Grüneisen, Z. Physik **46**, 151 (1927).

<sup>3</sup>) H. Reddemann, Ann. Physik **14**, 139 (1932).

<sup>4</sup>) E. Goens, and E. Grüneisen, Ann. Physik **14**, 164 (1932).

<sup>5</sup>) E. Grüneisen and H. Adenstedt, Ann. Physik **31**, 714 (1938).

<sup>6</sup>) R. L. Powell and W. A. Blanpied, Thermal Conductivity of Metals and Alloys at Low Temperatures, N. B. S. Circular 556, Washington (1956).

<sup>7</sup>) K. Mendelssohn and H. M. Rosenberg, Proc. Phys. Soc. London A **65**, 385 and 388 (1952).

<sup>8</sup>) H. M. Rosenberg, Philos. Trans. Roy. Soc. London A **247**, 441 (1955).

<sup>9</sup>) G. K. White, Proc. Phys. Soc. London A **66**, 559 and 844 (1953).

<sup>10</sup>) D. K. C. MacDonald, G. K. White and S. B. Woods, Proc. Roy. Soc. London A **235**, 358 (1956).

<sup>11</sup>) G. K. White and S. B. Woods, Canad. J. Phys. **35**, 248 (1957).

<sup>12</sup>) G. K. White and S. B. Woods, Canad. J. Phys. **35**, 565 and 892 (1957); *ibid.* **36**, 875 (1958).

In many cases, however, Grüneisen's specimens were of a purity (as measured by the residual resistivity) not markedly inferior to and in some cases comparable with or even better than the modern specimens. Thus it appeared to be worthwhile to repeat the measurements of electrical and thermal conductivity of some of these specimens and to extend them to liquid helium temperatures.

Fortunately some of the pure metal specimens from the collection of the late Professor Güneisen have been preserved in Marburg and were made available to us by Professor E. Vogt. The present report describes measurements made on iron and rhodium.

## 2. Apparatus

The specimens were in the shape of thin rods, and the measurements of their thermal and electrical conductivities were made in a cryostat previously described<sup>9</sup>). The thermal conductivities were measured by means of differential gas thermometers, the electrical conductivities by means of a galvanometer amplifier. The points of attachment of the thermometers also served as potential terminals for the electrical measurements, thus reducing geometrical uncertainties in the ratio of thermal to electrical conductivity.

## 3. Rhodium

Two specimens of rhodium were measured. Both were from the same rod as the specimen measured by Grüneisen and Goens<sup>1</sup>). The rod was of rectangular cross-section, about 1.5 mm square. Specimen No. 1 was 7.5 cm long, No. 2 was 3.4 cm.

It is believed that No. 1 had previously been annealed in vacuo at 1000 °C for about 10 minutes, and we have measured it as received. Specimen No. 2 was annealed in vacuo at 1400 °C for 5 hours and cooled slowly. As seen from Table I, both specimens had comparable residual resistivities, that of No. 2 being about 5% lower.

Table I  
Residual Resistivity of the Specimens

Specimen	$\frac{\varrho_0}{\mu \Omega\text{-cm}}$	$\frac{(\kappa/T)_0}{W\text{-cm}^{-1}\text{-deg}^{-2}}$	$(L/\varrho_0) (\kappa/T)_0^1$
Rhodium (No. 1)	0.015 <sub>5</sub>	1.63	0.96
Rhodium (No. 2)	0.014 <sub>8</sub>	1.70	0.98
Rhodium (W. & W. <sup>11</sup> ))	0.0084	2.87	1.01
Iron (R. <sup>9</sup> ))	0.12	0.17	1.2
Iron (K. K. & W. <sup>12</sup> ))	0.24 <sub>3</sub>	0.10 <sub>0</sub>	0.99
Iron (No. 1)	0.09 to 0.10	0.23 <sub>5</sub>	1.1 <sub>0</sub> to 1.0 <sub>5</sub>
Iron (No. 2)	0.92	0.26 <sub>0</sub>	1.00

The thermal conductivities of these two specimens are plotted in fig. 1 as functions of temperature. The electrical resistivities are given in Table II.

The electrical and thermal resistivities can be separated into components due to the scattering of electrons by lattice imperfections (residual resistivity)

and due to scattering by lattice waves (ideal resistivity) — see, for example, reference<sup>13</sup>). Thus the electrical resistivity becomes

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_i(T) \quad (1)$$

where the ideal resistivity vanishes as  $T$  tends to zero, so that  $\varrho_0$  is the limiting value of  $\varrho$  as  $T \rightarrow 0$ . If Matthiessen's rule is satisfied,  $\varrho_i(T)$  is independent of the value of  $\varrho_0$ . Similarly, the thermal resistivity is given by

$$W = W_0 + W_i \quad (2)$$

and the two residual resistivities should be related by the Wiedemann-Franz law

$$W_0/T = \varrho_0/L \quad (3)$$

where  $L$ , the Lorenz number, is  $2.45 \cdot 10^{-8}$  ohm-watt-degree<sup>-2</sup>. At lowest temperatures  $W_i \ll W_0$ , so that the thermal conductivity  $\kappa \propto T$  and is given by

$$(\kappa/T)_0 = L/\varrho_0 \quad (4)$$

As will be seen from Table I, there is reasonable agreement for the two rhodium specimens between the limiting value of  $\kappa/T$  and  $L/\varrho_0$ .

The values of  $\varrho_0$  of these two specimens are somewhat higher than  $\varrho_0$  of the purer of White and Woods's two rhodium specimens<sup>11</sup>); however, they are considerably lower than of any other rhodium specimen previously measu-

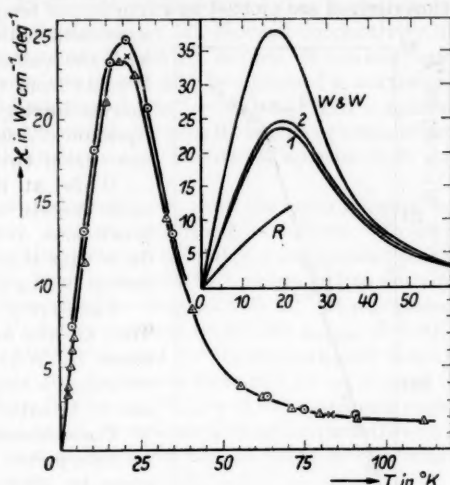


Fig. 1. Thermal Conductivity of rhodium:  $\Delta$  specimen No. 1,  $\circ$  specimen No. 2,  $\times$  points of Grün-eisen and Goens<sup>1)</sup>, W. & W. curve of White and Woods<sup>11)</sup>, R curve of Rosenberg<sup>8)</sup>

Table II  
Electrical Resistivity of Rhodium (No. 1)

$T$ °K	$\varrho$ $\mu \Omega\text{-cm}$	$\varrho_i$	$T$ °K	$\varrho$ $\mu \Omega\text{-cm}$	$\varrho_i$
4.2	0.0155		54.7	0.170	0.155
14.3	0.0160	0.0005	70.1	0.380	0.36 <sub>5</sub>
18.7	0.0167	0.0012	78.8	0.524	0.50 <sub>5</sub>
23.2	0.0188	0.0033	90.2	0.751	0.73 <sub>5</sub>
32.9	0.0318	0.016 <sub>5</sub>	110.6	1.178	1.16
40.8	0.0581	0.042 <sub>5</sub>	292.3	5.043	5.03

red. The thermal conductivity curves (see Fig. 1) are in reasonable accord with measurements of the rhodium specimen from the same source made at hydrogen and oxygen temperatures by Grün-eisen and Goens<sup>1)</sup>.

<sup>13)</sup> P. G. Klemens, Handbuch der Physik Band 14, Springer Verlag, Berlin 1956.



To calculate  $W_i$  from (2), we used values of  $W_0$  derived not from the observed residual resistivity  $\varrho_0$  but from the limiting value  $(\alpha/T)_0$ . Values of  $W_i$  thus derived are plotted as a function of temperature in Fig. 2. There is good

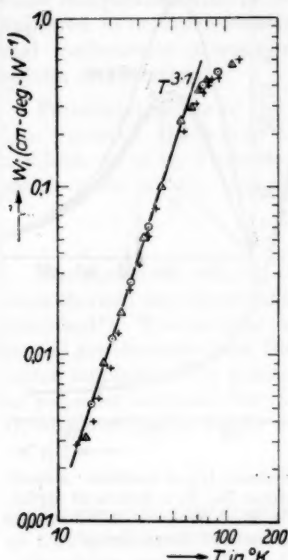


Fig. 2. Ideal thermal resistivity of rhodium: + White and Woods<sup>11</sup>,  $\Delta$  specimen No. 1,  $\circ$  specimen No. 2

and  $\varrho_i(s-s) \propto T^5$ ,  $W_i(s-s) \propto T^2$ ; also

$$W_i(s-d) T = \varrho_i(s-d)/L. \quad (6)$$

It is probable that at lowest temperatures  $\varrho_i(s-s) \ll \varrho_i(s-d)$ . Thus the ratio  $L W_i T / \varrho_i$  gives a measure of the ratio  $W_i(s-d) / [W_i(s-s) + W_i(s-d)]$ . At 20 °K in the case of rhodium this ratio is 0.32.

If the Fermi surface in the  $s$ -band and in the  $d$ -band coincide in reduced momentum space,  $W_i(s-d) \propto T^2$ ,  $\varrho_i(s-d) \propto T^3$  and the ratio  $L W_i T / \varrho_i$  tends to a constant value at lowest temperatures. This seems to be the case for palladium<sup>14</sup>. If, however, the two surfaces do not coincide, these transitions will tend to be frozen out at lowest temperatures, and  $W_i(s-d)$  and  $\varrho_i(s-d)$  would, in the appropriate temperature range, vary more rapidly, but would still be related by (6). Since around 20 °K,  $W_i(s-s)/W_i(s-d) \simeq 2$ , and since  $L W_i T / \varrho_i$  decreases as  $T^{0.5}$  and  $\varrho_i$  as  $T^{4.5}$ , the ratio  $W_i(s-d)/W_i(s-s)$  seems to vary approximately as  $T^{1.5}$ . A similar situation appears to exist in the case of iridium<sup>11</sup>.

<sup>14</sup> W. R. G. Kemp, P. G. Klemens, A. K. Sreedhar, and G. K. White, *Philos. Mag.* **46**, 811 (1955).

While at low temperatures  $W_i \propto T^2$  for most metals, in agreement with theoretical predictions, White and Woods found for rhodium that  $W_i \propto T^{3.1}$ . This result has been confirmed by the present measurements.

Values of  $\varrho_i = (\varrho - \varrho_0)$  are given in Table II. They are also in good agreement with the values found by White and Woods, so that Matthiessen's rule for electrical resistivity seems also to be satisfied.

These observed conduction properties must be interpreted in a manner similar to that given by White and Woods<sup>11</sup>). The conduction is mainly due to electrons in the  $s$ -band, and there are phonon induced transitions within the  $s$ -band ( $s-s$ ), and from the  $s$ -band into the  $d$ -band ( $s-d$ ). Thus (see, for example, reference<sup>13</sup>))

$$W_i = W_i(s-s) + W_i(s-d) \quad (5a)$$

$$\varrho_i = \varrho_i(s-s) + \varrho_i(s-d) \quad (5b)$$

## 4. Iron

Grüneisen and Goens<sup>1)</sup> measured the thermal conductivity of pure iron at 83.2 °K and at 21.2 °K. At the latter temperature they found a conductivity of 5.6 watt-cm<sup>-1</sup>-deg<sup>-1</sup>. Subsequently the thermal conductivity of pure iron was measured by Rosenberg<sup>8)</sup> and by Kemp, Klemens, and White<sup>15)</sup>. Rosenberg's specimen was purer, and he obtained a maximum in the thermal conductivity of 3.5 watt-cm<sup>-1</sup>-deg<sup>-1</sup> — see also Fig. 3 — against a value of about 2.5 obtained by Kemp et al. A even Rosenberg's maximum value was well below that of Grüneisen and Goens, it appears that the latter specimen was the purest.

The present iron specimens are believed to be from the same material as that of Grüneisen and Goens, and was described as follows: "Doubly refined electrolytic iron, not melted in vacuo but cut out of a precipitated plate. Annealed at 950 °C to remove H<sub>2</sub> then compressed (? gestaucht) to destroy the precipitation structure and reannealed in vacuo at 950 °C." It was stated that this material should have a relative residual resistivity  $\varrho_0/\varrho_{273}$  of 0.007, as against the value of  $\varrho_{27}/\varrho_{273}$  of 0.0078 quoted by Grüneisen and Goens for their specimen. Unfortunately the specimens measured by us showed a higher value of  $\varrho_0/\varrho_{273}$ , ranging from 0.0096 to 0.011<sub>2</sub>, and the maximum value of  $\kappa$  did not exceed 4.8 watt-cm<sup>-1</sup>-deg<sup>-1</sup>, as against Grüneisen and Goens's value of 5.6 at 21 °K. Thus the present specimens turned out to be somewhat less pure than expected, but still a little purer than Rosenberg's specimen. The reason for this loss of purity is not known.

The material received by us was in two pieces. From one piece a small rod was taken, about 2.8 cm. long and of rectangular cross-section (2.5 mm. × 2.5 mm. approx.) to become specimen No. 1. Its thermal conductivity was measured and is given in Fig. 3; some electrical resistance data is given in Table I.

Great difficulty was experienced in obtaining reproducible electrical resistivity measurements at helium temperatures, partly because of the unfavourable specimen geometry<sup>16)</sup> and perhaps also because of a lack of definition in the effective potential contact points. While some measurements indicated a value of  $\varrho_0$  in reasonable agreement with the low temperature limit of  $\kappa/T$ , other measurements gave values of  $\varrho_0$  which were about 20% too low.

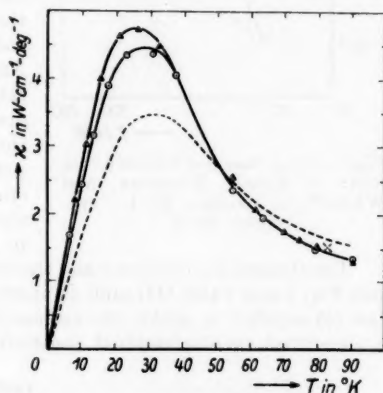


Fig. 3. Thermal conductivity of iron: ○ specimen No. 1, △ specimen No. 2, × point of Grüneisen and Goens<sup>1)</sup>, — — — Rosenberg<sup>8)</sup>

<sup>15)</sup> W. R. G. Kemp, P. G. Klemens, and G. K. White, Aust. J. Phys. 9, 180 (1956).

<sup>16)</sup> A current sufficient to produce a reasonable deflection of the galvanometer amplifier produced substantial heating of the specimen.

While one could easily dismiss this discrepancy as being merely an error in measurement due to the unfavourable conditions, it was noted that a similar effect had been observed by Rosenberg<sup>8</sup>) on his purer specimen. It had not been observed by Kemp et al.<sup>15</sup>) on their less pure specimen, but it was felt that an effect observed on the two purest specimens measured to date might possibly be an intrinsic property of iron.

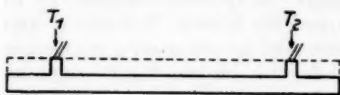


Fig. 4. Shape of iron specimen No. 2

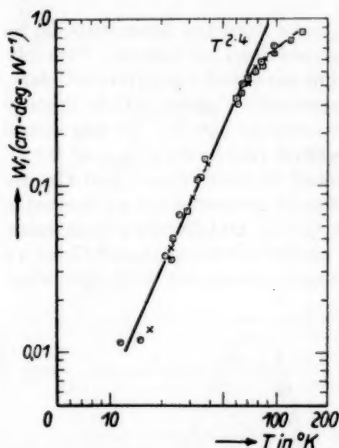


Fig. 5. Ideal thermal resistivity of iron:  $\square$  Kemp, Klemens, and White<sup>15</sup>),  $\times$  specimen No. 1,  $\circ$  specimen No. 2

In order to clarify this point, a second specimen (No. 2) of more favourable geometry was prepared from the other piece of iron. A plate was cut, about 2.4 mm. thick and of rectangular cross-section (4 mm.  $\times$  30 mm.) as indicated in Fig. 4. Two holes were drilled at one side, about 20 mm. apart, and copper wires soldered into them: these were the potential and thermometer connections. Material was then removed by grinding that face, so as to leave a bar, 2.4 mm.  $\times$  1.7 mm. in cross-section, with two projections as shown in Fig. 4; these projections carried the contacts. Not only was the resulting rod of smaller cross-sectional area than No. 1, but any traces of solder on the sides of the rods had been removed by grinding, and since the projections were of the same material as the rod, the equipotential surfaces in the presence of an electric current could be expected to have the same shape as the isothermal surfaces in the presence of a heat current.

The thermal conductivity and the electrical resistivity of No. 2 was measured (see Fig. 3 and Table III) and, as shown in Table I, the Wiedemann-Franz law (4) satisfied to within the accuracy of measurement. Specimen No. 2 had a somewhat smaller residual resistivity.

Table III  
Electrical Resistivity of Iron (No. 2)

$T$ $^{\circ}\text{K}$	$\varrho$ $\mu\Omega\text{-cm}$	$\varrho_i$	$T$ $^{\circ}\text{K}$	$\varrho$ $\mu\Omega\text{-cm}$	$\varrho_i$
4.2	0.092		61.2	0.368	0.27 <sub>4</sub>
15.2	0.097	0.005	74.2	0.631	0.54
20.8	0.100	0.008	79.1	0.744	0.65
26.1	0.106	0.014	90.2	1.06	0.97
32.5	0.120	0.028	293.0	10.3	10.2
54.4	0.269	0.177			

The ideal thermal resistivity  $W_t$  (Fig. 5) was calculated and agrees well with values of  $W_t$  previously derived<sup>15</sup>).

Values of  $\varrho_i$  given in Table III are a little lower than values previously obtained, but have a similar temperature dependence ( $\varrho_i \propto T^3$ ). It appears, as already previously suggested, that ( $s-s$ ) and ( $s-d$ ) scattering contribute roughly to the same extent towards  $W_i$ .

**Acknowledgment:** The authors wish to thank Professor E. Vogt for making these specimens available. As a tribute to the pioneering work of the late Professor E. Grüneisen in this field, they submit this report to the *Annalen der Physik*, mindful of his close association with that journal.

Sydney (Australia), Division of Physics, C. S. I. R. O. National Standards Laboratory.

Bei der Redaktion eingegangen am 9. März 1959.

# Contribution to the Theory of Bosons and Fermions with Oriented Spins

By A. A. Sokolov, and Yu. M. Loskutov

With 4 Figures

## Abstract

A theory is developed for positive and negative energy charged bosons and fermions with spins directed oppositely with respect to the corresponding momenta. Invariance of the equations for a fixed spin direction is investigated.

## 1. General theory of vector particles

As is well known, Lee and Yang<sup>1)</sup> predicted a new phenomenon in the case of weak interactions which has subsequently been called parity nonconservation<sup>2)</sup>. For progresses in which the neutrino is involved (fermions with zero rest mass,  $m_0 = 0$ ) this phenomenon can be explained either by the two-component theory or by the theory of Dirac particles with oriented spins<sup>3,4)</sup>. In the latter case the solution corresponding to one of the spin directions ( $s_1 = s$ ) should be retained for positive energies ( $\varepsilon = 1$  e.g. neutrino) whereas for negative energies ( $\varepsilon = -1$ , antineutrino) the solution corresponding to the second spin direction ( $s_{-1} = -s$ ) should be used. This can be done if we require that the wave function  $\psi$  not only obey the Dirac equation but also the auxiliary condition<sup>5)</sup>

$$\left( s_\varepsilon - \frac{(\vec{\sigma} \vec{p})}{p} \right) \psi = 0 \quad (1.1)$$

or  $(\lambda - \varrho_1) \psi = 0$  where  $\lambda = \varepsilon s_\varepsilon = -1$  (or  $+1$ ) for  $\varepsilon = 1$  as well as for  $\varepsilon = -1$ . The quantity  $s_\varepsilon = -s_{-\varepsilon}$  characterizes the double spin projection (in units of  $\hbar$ ) on the momentum direction.

We shall attempt to extend this result to particles possessing spins of 1 (bosons, vector field) and vanishing rest masses. In the general case when the particles can possess two charge values we obtain Maxwellian type equations.

$$\vec{E}^\pm = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^\pm}{\partial t}, \vec{H}^\pm = \text{rot } \vec{A}^\pm, \text{rot } \vec{H}^\pm - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^\pm}{\partial t} = 0, \text{div } \vec{A}^\pm = \varphi^\pm = 0. \quad (1.2)$$

<sup>1)</sup> T. D. Lee, C. N. Yang, *Physic. Rev.* **104**, 254 (1956); **105**, 1671 (1957).

<sup>2)</sup> The following will be required of a theory explaining parity nonconservation: a) an explanation of longitudinal polarization of particles produced as a result of spontaneous decay and b) an explanation of the asymmetry in the number of particles emitted at various angles during the decay of longitudinally-polarized particles.

<sup>3)</sup> A. Sokolov, B. Kerimov, *Ann. Physik* **2**, 46 (1958).

<sup>4)</sup> A. Sokolov, *Nucl. Phys.* **9**, 420 (1959).

<sup>5)</sup> A. A. Sokolov, *Journ. of Phys. USSR* **9**, 363 (1945); A. A. Sokolov, *ZETF* **33**, 794 (1957).

Here the sign  $(-)$  refers to the principal function and  $(+)$  to the complex conjugate one, electromagnetic field notations being used here.

Although the transversality condition for a vector field,  $\text{div } \vec{A}^\pm = 0$ , is not invariant under a Lorentz transformation, we can satisfy this requirement in any Lorentz coordinate system by applying the gauge transformations in a manner similar to that in Maxwell's theory. Taking into account the gauge transformation when changing to a primed coordinate system which moves along the  $Z$  axis with a velocity  $c\beta$  relative to the unprimed system, we find that the vector potential will transform according to the law

$$\vec{A}' = \gamma_n \vec{A} - \vec{\nabla}' \left( \frac{\partial}{c \partial t'} \right)^{-1} \frac{\beta A_z}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

where

$$\gamma_x = \gamma_y = 1, \gamma_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

It is interesting to notice that in changing from one inertial system to another the projection of the spin on the direction of the momentum (quantity  $s$ ) remains constant for  $m_0 = 0$  (this has been demonstrated for fermions in ref.<sup>6</sup>)).

In order to obtain the solutions referring to longitudinally polarized bosons the following auxiliary condition should be imposed on the wave functions:

$$\vec{H}^\pm = s_e \sqrt{-\nabla^2} \vec{A}^\pm = \mp i s_e \vec{E}^\pm. \quad (1.3)$$

It corresponds to condition (1.1) introduced for fermions. Here the eigenvalues of the operator  $\sqrt{-\nabla^2}$  are equal to  $\kappa$ . In this case the solution for the generalized vectorpotential  $\vec{A}^\pm$  satisfying equations (1.2) under condition (1.3) can be represented in the form

$$\vec{A}^\pm = L^{-1/2} \sum_{\vec{\kappa}, s} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} \vec{b}^\pm(\vec{\beta}^0, s_e, \vec{\kappa}^0) q^\pm(\epsilon, s_e, \vec{\kappa}) e^{\pm i c \epsilon t \mp i \vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \quad (1.4)$$

where

$$\vec{b}^\pm(\vec{\beta}^0, s_e, \vec{\kappa}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\beta}^0 \mp i s_e [\vec{\kappa}^0 \vec{\beta}^0]), \quad (1.5)$$

and  $\vec{\beta}^0$  is a unit vector perpendicular to the vector  $\vec{\kappa}^0$ .

In case of a real field ( $\vec{A}^+ = \vec{A}^-$  etc.) we arrive at the usual theory of circularly polarized photons<sup>7</sup>) Outgoing from (1.4) it is not difficult to determine from (1.2) the vectors  $\vec{H}^\pm$  and  $\vec{E}^\pm$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}^\pm &= L^{-1/2} \sum_{\vec{\kappa}, s} \kappa s_e \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} \vec{b}^\pm(\vec{\beta}^0, s_e, \vec{\kappa}^0) q^\pm(\epsilon, s_e, \vec{\kappa}) e^{\pm i c \epsilon t \mp i \vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \\ \vec{E}^\pm &= L^{-1/2} \sum_{\vec{\kappa}, s} (\mp i \epsilon \kappa) \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} \vec{b}^\pm(\vec{\beta}^0, s_e, \vec{\kappa}^0) q^\pm(\epsilon, s_e, \vec{\kappa}) e^{\pm i c \epsilon t \mp i \vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

<sup>6</sup>) A. A. Sokolov, I. M. Ternov, Yu. M. Loskutov, ZETF **36**, 930 (1959).

<sup>7</sup>) D. D. Ivanenko, A. A. Sokolov, Doklady Acad. Nauk **61**, 51 (1948); also see A. A. Sokolov, I. M. Ternov, ZETF **31**, 473 (1956).

In order to find the relation between the amplitudes  $q^\pm$  and dynamic variables directly referring to the particles we determine the integral expressions for the energy

$$H = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \{(\vec{E}^+ \vec{E}^-) + (\vec{H}^+ \vec{H}^-)\} = \sum_{\vec{\kappa}, \varepsilon} c \hbar \kappa q^+(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}) q^-(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}) \quad (1,7a)$$

momentum

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi c} \int d^3x \{[\vec{E}^+ \vec{H}^-] - [\vec{H}^+ \vec{E}^-]\} = \sum_{\vec{\kappa}, \varepsilon} \hbar \varepsilon \vec{\kappa} q^+(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}) q^-(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}), \quad (1,7b)$$

charge

$$Q = \frac{ie}{4\pi c \hbar} \int d^3x \{(\vec{A}^+ \vec{E}^-) - (\vec{E}^+ \vec{A}^-)\} = - \sum_{\vec{\kappa}, \varepsilon} e \varepsilon q^+(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}) q^-(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}), \quad (1,7c)$$

and spin

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi c} \int d^3x \{[\vec{E}^+ \vec{A}^-] - [\vec{A}^+ \vec{E}^-]\} = \sum_{\vec{\kappa}, \varepsilon} \hbar \vec{\kappa}^0 \varepsilon s_\varepsilon q^+(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}) q^-(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{\kappa}). \quad (1,7d)$$

From (1,7b and (1,7d) it can be seen that  $s_\varepsilon$  characterizes the projection of the spin on the momentum direction for particles with positive as well as negative energy.

Relation (1,7d) can easily be deduced from the spin pseudovector whose space components are defined by the values  $s_{[23],4}$ ,  $s_{[31],4}$ ,  $s_{[12],4}$  (see (1,7d)) and fourth component by

$$S_4 = \frac{1}{4\pi c} \{(\vec{A}^+ \vec{H}^+) + (\vec{H}^+ \vec{A}^+)\}. \quad (1,8)$$

The momentum, spin and charge of the Bose amplitudes which directly characterize the particles should be found from integral expressions (1,7b, c, d) (see ref.<sup>8</sup>). They obey the following commutation relations

$$a^- a^+ - a^+ a^- = 1, \quad (1,9)$$

where  $a^+$  and  $a^-$  are the particle creation and absorption operators respectively.

Determining now the commutation relations for  $q^\pm$  from the quantum equation of motion

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, A]\right)$$

and taking into consideration (1,9) we get

$$\left. \begin{aligned} q^-(\varepsilon = 1, s_1, \vec{\kappa}) &= a^-(\varepsilon = 1, Q = -e, s_1, \vec{g}) \\ q^-(\varepsilon = -1, s_{-1}, \vec{\kappa}) &= a^+(\varepsilon = -1, Q = e, s_{-1}, -\vec{g}), \end{aligned} \right\} \quad (1,10)$$

where  $\vec{g} = \varepsilon \vec{\kappa}$  is the particle momentum.

We shall now investigate the dependence of the boson polarization (which we specify by the so-called helicity<sup>9</sup>) on the magnitude of  $s_\varepsilon$ .

<sup>8</sup> D. D. Ivanenko, A. A. Sokolov, Sow. Phys. **11**, 590 (1937).

<sup>9</sup> The spin is frequently described by means of the pseudovector  $\vec{s}$  whose direction is a matter of convention. Therefore it seems better to characterize the spin (or polarization) by its helicity. If a screw is moved in the direction of the momentum and the thread is such that its direction of rotation coincides with that of the polarization vector we obtain in the case of a right-handed screw a right-handed helicity and in the case of a left-handed screw a left-handed helicity. It should be noted that for particles with  $m_0 = 0$  the helicity is conserved in all Lorentz systems.



Consider first the case  $s_z = 1$  when

$$\vec{A}^\pm \sim (\vec{\beta}^0 \mp i \varepsilon [\vec{g}^0 \vec{\beta}^0]) \exp(\pm i c \varepsilon g t). \quad (1,11)$$

If the vector  $\vec{\beta}^0$  is directed along the  $x$  axis and the momentum  $\vec{g}$  along the  $z$  axis, the vector  $[\vec{g}^0 \vec{\beta}^0]$  will be directed along the  $y$  axis. In this case, retaining only the real part of the functions we get:

$$A_x^\pm \sim \cos g c t, \quad A_y^\pm \sim \sin g c t. \quad (1,11a)$$

It can be seen from here that  $\vec{A}^\pm$  will rotate from the  $x$  axis to the  $y$  axis, i.e. for  $s_z = 1$  in a right-handed coordinate system the helicity will be right-handed for  $\varepsilon = 1$  as well as  $\varepsilon = -1$  and it will be left-handed in a left-handed system. In contrast, for  $s_z = -1$  we have a left-handed helicity in a right-handed system and vice versa.

## 2. Invariance of the vector equations under $C$ , $T$ and $I$ transformations

We shall now investigate how the vector equations for free particles with oriented spins behave separately under charge conjugation transformations ( $C$ ), time reversal ( $T$ ) and space inversion ( $I$ ) since the Luders-Pauli theorem ( $CTI = \text{const}$ ) refers to the combined triple operation.

a) For charge conjugation transformations ( $C$ ) we have

$$\vec{A}^{\pm} = \vec{A}^{\mp}.$$

Therefore, to retain the form of the fundamental equations in the new (primed) system we must perform the following transformation in (1,4)

$$\varepsilon' = -\varepsilon, \quad \vec{x}' = -\vec{x}, \quad e' = -e. \quad (2,1)$$

Then for  $A'^{\pm}$  we obtain an expression of the form identical to (1,4) and in which the primed quantities are related to the unprimed ones by the equations

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}^\pm (\vec{\beta}^0, s'_e, \vec{x}'^0) &= \vec{b}^\mp (\vec{\beta}^0, s_{-e'}, -\vec{x}'^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\beta}^0 \mp i s'_e [\vec{x}'^0 \vec{\beta}^0])^{10}, \\ q^\mp (-\varepsilon', s_{-e'}, -\vec{x}') &= q'^\pm (\varepsilon', s'_e, \vec{x}') \end{aligned} \right\} \quad (2,2)$$

From (2,2) it can be seen that the new amplitudes  $a'^{\pm}$  the arguments characterise directly the state of the particle, are connected with the old ones by the relations

$$a^\pm (\varepsilon' = 1, s'_1, Q' = -e, \vec{g}') = a^\pm (\varepsilon = -\varepsilon', s_{-1} = s'_1, Q = Q', \vec{g} = \vec{g}'). \quad (2,3)$$

Thus if the initial state is that represented in fig. 1 we obtain as a result of charge conjugation the state shown in fig. 2. The momentum vector (solid arrow) and direction of rotation of the polarization vector (helicity) characterize the particle state. The direction of the spin pseudovector (dotted arrow) however is only of a conditional nature.

Noninvariance ( $C \neq \text{const}$ ) is exhibited here in the fact that if in the main equation we have a certain helicity for  $\varepsilon = 1$  then for  $\varepsilon' = 1$  it will be of opposite sign ( $s'_1 = s_{-1} = -s_1$ ).

<sup>10</sup> We shall not prime the normalization vectors  $\vec{b}$  as they are  $C$  numbers and are completely defined by the arguments  $\vec{\beta}^0$ ,  $s_e$  and  $\vec{x}^0$  (of formula (1,5)).

b) Under time reversal ( $T$ ) we have  $t' = -t$ ,  $\vec{r}' = \vec{r}$ , for  $\vec{E}'^{\pm} = -\vec{E}^{\pm}$ ,  $\vec{H}'^{\pm} = \vec{H}^{\pm}$ ,  $\vec{A}'^{\pm} = \vec{A}^{\pm}$  equation (1,4) retains its form in the primed coordinate system if we make the substitution

$$\varepsilon' = -\varepsilon, \vec{\kappa}' = \vec{\kappa}, e' = e.$$

Then

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}^{\pm}(\vec{\beta}^0, s'_e, \vec{\kappa}'^0) &= \vec{b}^{\pm}(\vec{\beta}^0, s_{-e'}, \vec{\kappa}'^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\beta}^0 \mp i s'_e [\vec{\kappa}'^0 \vec{\beta}^0]), \\ q'^{\pm}(e', s'_e, \vec{\kappa}') &= q^{\pm}(-e', s_{-e'}, \vec{\kappa}'). \end{aligned} \right\} \quad (2,4)$$

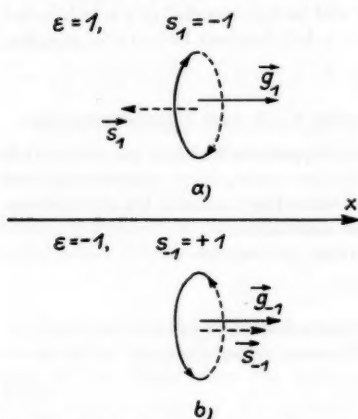


Fig. 1. Initial state of longitudinally polarized particles (right-handed system)

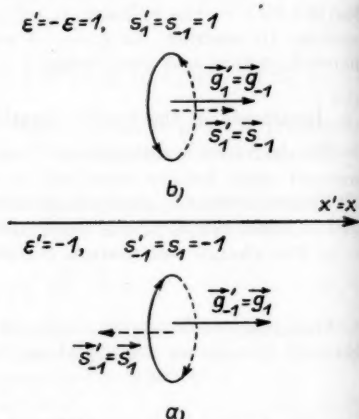


Fig. 2. Charge conjugation transformation (right-handed system)

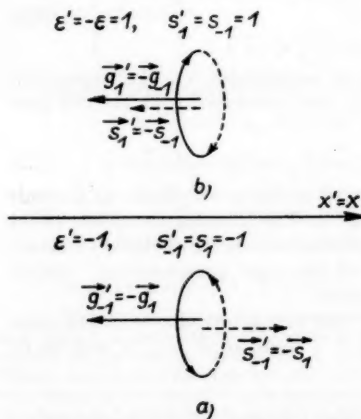


Fig. 3. Time reversal (right-handed system)

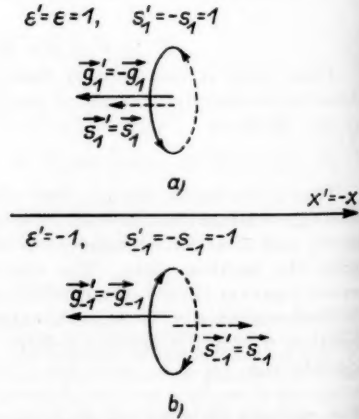


Fig. 4. Space inversion (left-handed system)

In this case, as in the case of charge conjugation, the relation (see (2,4)) between the new primed amplitudes and old ones can be easily established

$$a^\pm (\varepsilon' = 1, s'_1, Q' = -e, \vec{g}') = a^\pm (\varepsilon = -\varepsilon', s_{-1} = s'_1, Q = -Q', \vec{g} = -\vec{g}'). \quad (2,5)$$

It can be seen from here that under time reversal the creation operator for negative energy particles transforms into an absorption operator of positive energy particle with an opposite charge.

Just as under charge conjugation the helicity of particles of identical energy will change its sign under time reversal ( $s'_1 = s_{-1} = -s_1$ ) and in this sense  $T \neq \text{const.}$  The time reversal transformation is represented in fig. 3.

However if combined inversion is carried out that is, both the charge conjugation, time reversal are performed we obtain

$$CT = \text{const.} \quad (2,6)$$

c) Finally we shall consider the space inversion operation (I):  $\ell' = \ell$ ,  $\vec{r}' = -\vec{r}$ . Then  $\vec{E}'^\pm = -\vec{E}^\pm$ ,  $\vec{H}'^\pm = \vec{H}^\pm$  and  $\vec{A}'^\pm = -\vec{A}^\pm$ . Changing furthermore the signs of vectors  $\vec{x}$  ( $\vec{x}' = -\vec{x}$ ) and of vector  $\vec{\beta}^0$  ( $\vec{\beta}^{0'} = -\vec{\beta}^0$ ) and of the spin projection on the momentum direction ( $s'_1 = -s_1$ )<sup>11)</sup> for  $\varepsilon' = \varepsilon$ , we obtain for  $\vec{A}'^\pm$  equation (1,4); with unprimed quantities replaced by the primed ones in the right handside, that is, equations (1,2) and (1,3) are invariant in this case.

For the amplitudes  $q'^\pm$  and vector  $\vec{b}'^\pm$  in the primed system we obtain

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}^\pm (\vec{\beta}^{0'}, s'_1, \vec{x}^{0'}) &= -\vec{b}^\pm (-\vec{\beta}^{0'}, -s_1, -\vec{x}^{0'}), \\ q'^\pm (\varepsilon', s'_1, \vec{x}') &= q^\pm (\varepsilon', -s_1, -\vec{x}'). \end{aligned} \right\} \quad (2,7)$$

As in the two preceding transformations the Bose commutation rules (1,9) are conserved under space inversion, and transition from the second quantised amplitudes  $a^\pm$  to the amplitudes  $a'^\pm$  in this case is defined by the equation

$$\left. \begin{aligned} a'^\pm (\varepsilon' = 1, s'_1, Q' = -e, \vec{g}') \\ = a^\pm (\varepsilon = \varepsilon', s_1 = -s'_1, Q = Q', \vec{g} = -\vec{g}'). \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

It can thus be seen that under space inversion the energy and the charge do not change signs ( $\varepsilon' = \varepsilon$ ,  $Q' = Q$ ) whereas the momentum and spin projection on the momentum change their signs ( $\vec{g}' = -\vec{g}$ ,  $s'_1 = -s_1$ ).

The space inversion transformation is represented in fig. 4. It can be seen that helicities corresponding to the energies of the same sign do not change ( $l = \text{const.}$ ) and in this sense invariance is preserved, despite the fact that  $s' = -s$ .

<sup>11)</sup> It should be noted that in the right and left-handed coordinate systems the same helicity is described by values of  $s$  with opposite signs. Therefore if  $s$  changes sign under space inversion the helicity should remain the same.

Thus the Luders-Pauli theory is valid in the theory of vector particles with oriented spins as well as in the fermion theory<sup>12)</sup>.

$$TCI = \text{const} \quad (2,9)$$

### 3. Comparison with results of the theory of Dirac particles with oriented spins

It has been shown<sup>2)13)14)</sup> that the Luders-Pauli theorem is valid in the two-component theory since combined inversion

$$CI = \text{const}, T = \text{const} \quad (3,1)$$

is applicable in this case.

It turns out, moreover, that the theory of fermions with oriented spins can also be formulated in such a manner that combined inversion (2,6) is applicable.

This has been performed in ref.<sup>4)</sup>. In the present paper we shall consider the case of fermions with nonvanishing masses ( $m_0 \neq 0$ ).

If auxiliary condition (1,1)<sup>15)</sup> is imposed on the Dirac particles the general solution of the free motion

$$\cos \theta'_k = \frac{\beta_1 \cos \theta - \beta}{\sqrt{(1 - \beta \beta_1 \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}}$$

and

$$\cos \theta'_s = \frac{\cos \theta - \beta \beta_1}{\sqrt{(\beta_1 - \beta \cos \theta)^2 + (1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}}$$

where  $c\beta_1 = c\frac{k}{K}$  is the velocity of the electron in the initial coordinate system.

The quantity

$$s' = \frac{\beta_1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{(1 - \beta \beta_1 \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2)(1 - \beta_1^2)}}$$

therefore becomes smaller than unity. This is due to the fact that the momentum vector is time-like and its fourdimensional components are proportional to  $k_{123} = \vec{k}$ ,  $k_4 = K$  whereas the four-dimensional components of the spin pseudovector are space-like and the components are proportional to  $s_{123} = \frac{K}{k} \vec{k}$ ,  $s_4 = k$  therefore these vectors rotate through different angles under Lorentz transformations.

For particles with zero rest mass ( $K = k$ ) the  $\beta_1 = 1$ . In this case  $\theta'_k = \theta$ , and hence in the new coordinate system  $s'$  will be also equal unity ( $s' = s = 1$ ).

<sup>12)</sup> This is true only for free particles. In presence of an interaction energy  $V$  which involves the product of several wave functions the variation of  $V$  as a whole should be taken into account in  $TCI$  transformations.

<sup>13)</sup> A. Salam, *Nuovo Cimento* **5**, 299 (1957).

<sup>14)</sup> L. D. Landau, *Nucl. Phys.* **3**, 127 (1957).

<sup>15)</sup> In passing it may be mentioned that for particles with nonvanishing rest masses ( $m_0 \neq 0$ ) condition (1,1) will not be Lorentz-invariant. Indeed, if the three dimensional momentum and spin vectors in the initial coordinate system were parallel to each other ( $s = 1$ ) and formed an angle  $\theta$  with the  $z$  axis, then in a new Lorentz coordinate system moving relative to the initial one with a velocity  $c\beta$  along the  $z$  axis the angles would be respectively.

It has permitted us to develop a theory for neutrinos with oriented spins and zero masses (for details see ref.<sup>6</sup>).

Dirac can be expressed as

$$\psi^\pm = L^{-1} \sum_{\vec{k}, \varepsilon} b^\pm(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{k}) q^\pm(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{k}) e^{\pm i \varepsilon K t \mp i \vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.2)$$

where

$$b^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f(\varepsilon K) \cos \theta_\varepsilon e^{-i \frac{\varphi}{2}} \\ f(\varepsilon K) \sin \theta_\varepsilon e^{i \frac{\varphi}{2}} \\ s \varepsilon f(-\varepsilon K) \cos \theta_\varepsilon e^{-i \frac{\varphi}{2}} \\ s \varepsilon f(-\varepsilon K) \sin \theta_\varepsilon e^{i \frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} K &= \sqrt{k^2 + k_0^2} \\ f(\varepsilon K) &= \sqrt{1 + \frac{k_0}{\varepsilon K}}, \\ \theta_\varepsilon &= \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} (1 - s) \end{aligned} \quad (3.3)$$

and  $\theta$  and  $\varphi$  are spherical angles of vector  $\vec{k}$ ;  $s_\varepsilon = \pm 1$  characterizes the double projection of the spin vector (in units of  $\hbar$ ) on the momentum direction for particles  $\varepsilon = 1$  as well as for particles with  $\varepsilon = -1$ .

The matrix  $b^+$  is conjugated to matrix  $b^-$ .

The Hamiltonian for Dirac particles

$$H = \int \psi^\dagger (c (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \alpha_3 m_0 c^2) \psi d^3 x = \sum c \hbar \varepsilon K q^\dagger(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{k}) q^-(\varepsilon, s_\varepsilon, \vec{k}) \quad (3.4)$$

differs from the boson Hamiltonian (1.7a) by the sign factor,  $\varepsilon$ , under the sum symbol. As a result, the Fermi commutation rules

$$a^+ a^- + a^- a^+ = 1 \quad (3.5)$$

will apply to the corresponding Dirac amplitudes  $a^\pm$ . This signifies that the amplitude  $a^-$  is the absorption operator and amplitude  $a^+$  — the creation operator.

We shall now show that for fermions with  $s_\varepsilon = 1$  the function  $\psi$  will describe particles of right-handed helicity in a right-handed coordinate system for arbitrary values of  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ); in a left-handed system the helicity will be left-handed.

Indeed, if the momentum  $\vec{g} = \varepsilon \vec{k}$  is directed along the  $z$  axis we obtain (of  $s_\varepsilon = 1$ )

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon=1} &\sim \begin{pmatrix} f(K) \\ 0 \\ f(-K) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i c K t) \\ \psi_{\varepsilon=-1} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ f(K) \\ 0 \\ -f(-K) \end{pmatrix} \exp(i c K t). \end{aligned}$$

It has been taken into account here that for  $\varepsilon = -1$  vector  $\vec{k}$  in accord with (1.10), should be replaced by  $-\vec{k}$  (since in noth cases the vector  $\vec{g} = \varepsilon \vec{k}$  should be directed along the  $z$  axis), i.e. angle  $\theta$  should be equal.

The spinor waves

$$S_x = \sigma_x \psi_{\epsilon=1} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ f(K) \\ 0 \\ f(-K) \end{pmatrix} \exp(-i c K t) \sim \cos c K t,$$

$$S_y = \sigma_y \psi_{\epsilon=1} \sim i \begin{pmatrix} 0 \\ f(K) \\ 0 \\ f(-K) \end{pmatrix} \exp(-i c K t) \sim \sin c K t,$$

$$S_x = \sigma_x \psi_{\epsilon=-1} \sim \begin{pmatrix} f(K) \\ 0 \\ -f(-K) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i c K t) \sim \cos c K t$$

$$S_y = \sigma_y \psi_{\epsilon=-1} \sim -i \begin{pmatrix} f(K) \\ 0 \\ -f(-K) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i c K t) \sim \sin c K t$$

will describe the rotation of the polarization vector from  $x$  to  $y$  thus forming a right-handed screw in a right-handed coordinate system and a left-handed screw in a left-handed system.

In the case  $s_z = -1$  it is not difficult to show that the helicity will be of opposite sign.

Consider now the Luder's-Pauli theorem for Fermi particles with non zero rest mass. We shall investigate the invariance of directly solution (3,2) which not only obeys the Dirac equation but also auxiliary condition (1,1).

a) As is well known, under the charge conjugation ( $C$ ) the  $\psi$  function varies according to the law

$$\psi'^{\pm} = -f i \alpha_2 \varrho_3 \psi^{\mp T} \quad (3,6)$$

where  $f$  is the normalized coefficient ( $|f|^2 = 1$ ) and the matrix  $-i \alpha_2 \varrho_3$  in our notations (see ref.<sup>16</sup>) has the form

$$-i \alpha_2 \varrho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Noting that  $\psi^{\mp T}$  is a transposed matrix we can retain  $\psi'^{\pm}$  in the same form as (3,2) by making the substitution

$$\epsilon' = -\epsilon, \vec{k}' = -\vec{k}, s'_z = s_z, e' = -e. \quad (3,7)$$

Applying then transformation (3,6) we obtain

$$\psi'^{\pm} = L^{-1/2} \sum_{\vec{k}', \epsilon'} b'^{\pm}(\epsilon', s'_z, \vec{k}') q^{\mp}(-\epsilon', s_z, -\vec{k}') e^{\pm i \epsilon \epsilon' K' t \mp i \vec{k} \cdot \vec{k}' r}$$

<sup>16</sup>) A. Sokolov, Quantenelektrodynamik, Akademie-Verlag, Berlin 1957.

and

$$b'^{\pm}(\varepsilon', s'_e, \vec{k}') = -i f \alpha_2 \varrho_3 b^{\mp T}(-\varepsilon', s_e, -\vec{k}'), f = i \varepsilon'.$$

Thus for the new amplitudes  $q'$  we get

$$q'^{\pm}(\varepsilon', s'_e, \vec{k}') = q^{\mp}(-\varepsilon', s_e, -\vec{k}'). \quad (3,8)$$

It can easily be shown that the Fermi as well as Bose amplitudes specify the particle properties, transform in accord with relations (2,3) (see also fig. 2), that is, for particles with the same energy sign the particle helicity changes its sign ( $s'_{\pm 1} = s_{\mp 1} = -s_{\pm 1}$ ) and in this sense  $C \neq \text{const}$ .

b) Under time reversal ( $T$ ):  $t' = -t$ ,  $\vec{r}' = \vec{r}$  and in order that the form of function  $\psi'^{\pm}$  be the same as in (3,2), substitution should be made

$$\varepsilon' = -\varepsilon, s'_e = s_e, \vec{k}' = \vec{k}, e' = e. \quad (3,9)$$

The wave functions, on the other hand, are connected as follows

$$\psi'^{\pm} = -i \varepsilon' s'_e \varrho_3 \psi^{\pm}.$$

For amplitudes  $q'^{\pm}$  we find

$$q'^{\pm}(\varepsilon', s'_e, \vec{k}') = q^{\pm}(-\varepsilon', s_e, \vec{k}'). \quad (3,10)$$

It can now be easily demonstrated that the Fermi amplitudes  $a^{\pm}$  transform in accordance with formula (2,5) (see fig. 3) derived by us for Bose amplitudes, i.e. under charge conjugation in virtue of the equation  $s'_{\pm 1} = -s_{\pm 1}$  we get  $T \neq \text{const}$ .

c) Finally, under space inversion ( $I$ ) when  $t' = t$ ,  $\vec{r}' = -\vec{r}$  the wave functions will transform according to the rule  $\psi' = -i \varrho_3 \psi$ . In order that the new solution possess the form as (3,2) the substitution  $\varepsilon' = \varepsilon$ ,  $\vec{k}' = -\vec{k}$ ,  $s'_e = -s_e$  should be made.

Hence with the aid of (3,7) we find that under space inversion helicity is conserved,

$$I = \text{const} \quad (3,11)$$

for particles with positive as well as negative energy ( $s'_1 = -s_1$  and  $s'_{-1} = -s_{-1}$  see fig. 4).

The relation between the primed Dirac amplitudes  $a'^{\pm}$  and the unprimed ones is the same as for bosons (see 2,8).

Although for Fermi particles  $C \neq \text{const}$  and  $T \neq \text{const}$  one finds that under combined inversion of the  $CT$  type (charge conjugation plus time reversal) the field free equations retains its helicity.

As it is well known, the experiments, which can confirm the reality of Fermi's coefficients, are interpreted according to two-component theory as the verification of the law  $T = \text{const}$ . According to our theory these experiments are interpreted as the verification of the law  $TC = \text{const}$ .

In conclusion we shall consider the transformation of Lagrangians under space and time inversion.

For vector equations (bosons) the Lagrangian

$$L = \frac{1}{4\pi} \{(\vec{E}^+ \vec{E}^-) - (\vec{H}^+ \vec{H}^-)\},$$



is obviously invariant under time reversal and space inversion inasmuch as under these transformations  $\vec{E}'^{\pm} = -\vec{E}^{\pm}$ ,  $\vec{H}'^{\pm} = \vec{H}^{\pm}$ . On the other hand for Dirac particles the Lagrangian

$$L = \psi^+ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi$$

where

$$H = \frac{c\hbar}{i} (\vec{\alpha} \vec{\nabla}) + \rho_3 m_0 c^2$$

is invariant under space inversion ( $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$ ,  $\psi' = -i\rho_3\psi$ ) but changes its sign, as Schwinger has noted<sup>17)</sup>, under time reversal ( $t' = -t$ ,  $\psi' = -i\rho_1\rho_3\psi$ )

$$L' = \psi'^+ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t'} + H' \right) \psi'.$$

Schwinger has investigated in the general form the type of the auxiliary transformations of functions  $\psi$  that should be performed in order to preserve the required invariance of the theory. In our case this was attained by substituting  $\varepsilon$  for  $-\varepsilon'$ ; from the physical point of view this means transferring particles from positive levels to negative ones and vice versa. This transformation corresponds to a trivial substitution which does not affect the equation itself

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t'}, \quad H' \rightarrow -H'.$$

In this case the Lagrangian retains its invariant form

$$L' = \psi'^+ \left( -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t'} - H' \right) \psi'.$$

The authors are grateful to M. M. Kolesnikova for help in treatment of the results presented in the graphs.

<sup>17)</sup> J. Schwinger, Physic. Rev. **82**, 914 (1951).

Moscow, State University.

Bei der Redaktion eingegangen am 6. April 1959.

## Sound Velocities in Binary Liquid Mixtures

By Harkrishan Singh and R. S. Seth<sup>1)</sup>

With 5 Figures

### Abstract

The velocity of sound in five binary liquid mixtures of Toluene—Carbon tetrachloride, Benzene—Hexane, Cyclo hexane—Carbon tetrachloride, Hexane—Toluene and Benzene—Carbon tetrachloride at various concentrations has been measured by the Debye Sear's diffraction method. It is found that the velocity and compressibility vary approximately linearly with concentration. Comparison between experimental and theoretical results shows fairly good agreement between them.

### Introduction

The dependence of the velocity of sound on concentration in binary liquid mixtures has been discussed by many workers<sup>2-6</sup>). We may divide the attempts to calculate the velocity into two groups. The first group consists of workers who have attempted to calculate sound velocity on the basis of a specific model of the liquid. The second group comprises of workers who base their calculations of sound velocity on thermo dynamic relations which exist between various physical characteristics of the liquid. The practical application of the results which belong to the first group is very limited as only a few liquids possess a known structure. The thermodynamic theory therefore offers greater possibilities. In this paper sound velocity measurements in binary liquid mixtures calculated on the basis of thermodynamics have been compared with the experimentally determined values.

### Theory

It can be proved thermodynamically that

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial V} \right]_T = -P + T \left[ \frac{\partial P}{\partial T} \right]_V. \quad (1)$$

Here  $U$  is the internal energy,  $V$  is the volume,  $P$  is the pressure and  $T$  is the temperature. Differentiating (1) twice and replacing  $c^2 = -V^2 \gamma \left[ \frac{\partial P}{\partial V} \right]_T$  we get

$$V^2 \gamma \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right]_T = c^2 - T \left[ \frac{\partial c^2}{\partial T} \right] \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Present address: D. A. V. College, Jullundur.

<sup>2)</sup> W. Schaffs, Z. Physik **114**, 251 (1939); **115**, 69 (1940).

<sup>3)</sup> W. Schaffs, Z. physik. Chem. **194**, 28 (1944).

<sup>4)</sup> D. Sette, J. chem. Physics **21**, 558 (1953).

<sup>5)</sup> B. Jacobson, J. chem. Physics **20**, 929 (1952).

<sup>6)</sup> Y. Wada, J. phys. Soc. Japan **9**, No. 4, 641 (1954).

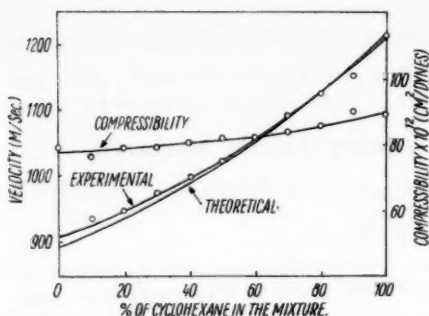


Fig. 1. Sound velocity in Carbon tetrachloride—Cyclohexane mixture at various concentrations

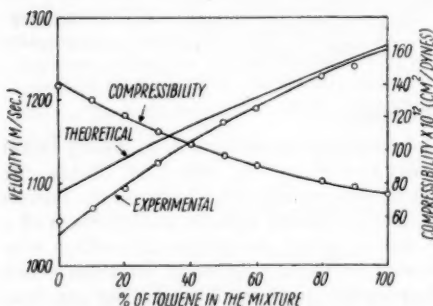


Fig. 2. Sound velocity of Toluene—Hexane mixture at various concentrations

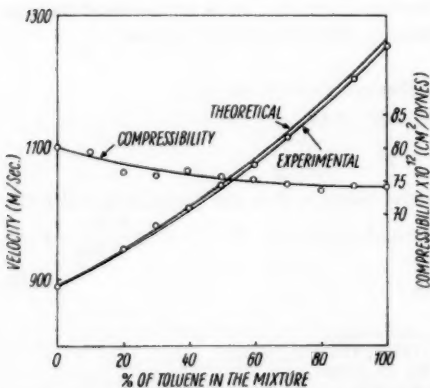


Fig. 3. Sound velocity in Toluene—Carbon tetrachloride mixture at various concentrations

where  $\gamma$  is the ratio of the entropy of the substance at a constant pressure, to the entropy at a constant volume, and  $c$  is the velocity of sound in the medium.

The internal energy  $U$  of a liquid may be represented as the sum of the potential energy  $\Phi$  and the kinetic energy  $E$ . Also we may assume that the kinetic energy  $E$  of the liquid depends only upon temperature and hence  $\left[\frac{\partial E}{\partial V}\right]_T = 0$ . For such a case the equation (2) becomes

$$\gamma V^2 \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} \right]_T = c^2 - T \left[ \frac{\partial c^2}{\partial T} \right]_V. \quad (3)$$

Integrating this expression and putting suitable boundary conditions we get a relation for calculating the velocity of sound in individual liquids<sup>7)</sup>.

The above reasoning may also be used to calculate sound velocities in ideal liquid mixtures. In an ideal mixture, the internal energy  $U$  of the mixture is equal to the sum of the internal energies of its constituents i. e.

$$U = \alpha U_1 + (1 - \alpha) U_2. \quad (4)$$

Where  $U_1$  and  $U_2$  are the internal energies of the first and second components of the mixture, and  $\alpha$  is the molar fraction of the component. Differentiating (4) twice and replacing  $\left[ \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right] = \frac{c^2 M}{V^2}$  we get

$$c^2 = \alpha \frac{M_1}{M} c_1^2 + (1 - \alpha) \frac{M_2}{M} c_2^2 \quad (5)$$

where  $c$  is the velocity in the mixture;  $c_1$ ,  $c_2$  are respectively

<sup>7)</sup> B. B. Kudriatsev, Soviet Physics — Acoustics, Vol. 2, No. 1 (A. I. P. publication).

the velocities in the first and second components,  $M$  is the average molecular weight of the mixture and  $M_1$ ,  $M_2$  are the molecular weights of the components.

To verify equation (5), some of the binary liquid mixtures which are close to ideal have been studied.

### Results

Sound velocities in five binary liquid mixtures of Toluene—Carbon tetrachloride, Benzene—Hexane, Toluene—Hexane, Benzene—Carbon tetrachloride, and Cyclohexane—Carbon tetrachloride have been studied. The measurements were taken by Debye-Sear's diffraction method at a frequency of 7.5 m. c. at various concentrations. As there was no provision for controlling the temperature, measurements were taken at the room temperature only. Slight variation in the room temperature could not be helped. Where the temperature variation was large, the measurements were reduced to a single temperature by applying suitable corrections. Exact values of the temperature gradient of velocity for the mixture at various concentrations are not available. Therefore, the mean of the temperature gradients of velocity of the components was used for the purpose of corrections. This will introduce some error but the error is expected to be too small to affect the results appreciably.

These velocity measurements were used to calculate compressibilities of all mixtures at various concentrations from the relation  $\beta = \frac{1}{c^2 \rho}$ . The values of density at different temperatures and concentrations were taken from the data in International Critical Tables Vol. III. Experimental values of velocity and compressibility have been plotted in figures 1 to 5. Theoretical values of velocity as given by relation (5) have also been plotted on the same graphs. Comparison between theoretical and experimental results shows that in the case of Toluene—Carbon tetrachloride, Benzene—Hexane and Cyclohexane—Carbon tetrachloride mixtures, the maximum difference between the observed

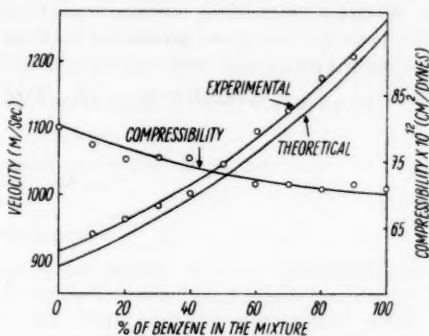


Fig. 4. Sound velocity in Benzene—carbon tetrachloride mixture at various concentrations

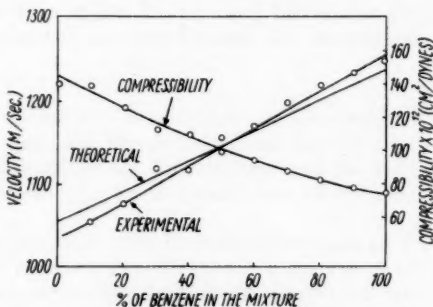


Fig. 5. Sound velocity in Benzene—Hexane mixture at various concentrations

and calculated values is less than 2%, where as in case of Hexane-Toluene and Benzene-Carbon tetrachloride mixtures the maximum discrepancy is about 5%. This is more than the experimental error and may be attributed largely to deviation from ideal mixture conditions. But on the whole we can say that there is fairly good agreement between theory and experiment.

Chandigarh (India), Department of Physics, Panjab University.

Bei der Redaktion eingegangen am 6. April 1959.

Un  
Au  
Konfig  
der M  
tropie  
Ladun  
die En  
den di  
versch  
energie

La  
starken  
strukt  
förmig  
felder  
Bei  
Legier  
achtet  
geladen  
Experi  
Die  
Ursach  
Die B  
recht  
Wi  
unten  
der L  
anstell  
Be  
allein  
energie  
der U  
die die

<sup>1)</sup> 1  
192.

## **Untersuchungen über die Umkehr der Spinvektoren in geladenen $180^\circ$ -Blochwänden**

Von Ch. Greiner

Mit 5 Abbildungen

### **Inhaltsübersicht**

Auf Grund experimenteller Ergebnisse werden für eine plattenförmige Konfiguration geladener  $180^\circ$ -Blochwände Untersuchungen über die Umkehr der Magnetisierungsvektoren unter der Voraussetzung einachsiger Anisotropie angestellt. Für drei charakteristische Wege der Umkehr wird die Ladungsverteilung in der Blochwand angegeben und die Wanddicke  $d_0$  sowie die Energiedichte  $E$  berechnet.  $d_0$  und  $E$  werden in Abhängigkeit vom Winkel, den die Magnetisierung mit ihrer Spur in die Blochwand bildet, für zwei verschiedene Verhältnisse der magnetostatischen Energie zur Anisotropieenergie diskutiert.

Ladungsführende Blochwände bilden sich bekanntlich zur Verminderung starker magnetostatischer Felder aus. Als Beispiel seien die Zipfelmützenstrukturen zur Herabsetzung der Streufelder um Fremdkörper und die dolchförmigen Abschlußbereiche bei Kobalt zur Verringerung der Oberflächenfelder genannt.

Bei Untersuchungen von spannungsinduzierten Elementarbereichen an der Legierung 50% Ni 50% Fe mit der Methode der Bitterschen Streifen beobachteten wir Bezirksstrukturen, zu deren Verständnis es erforderlich war, geladene  $180^\circ$ -Blochwände einzuführen, die im einfachsten Fall, den das Experiment nahelegte, Ebenen im äquidistanten Abstand darstellen.

Die Existenz derartiger Wände kann man nicht auf die eben erwähnte Ursache zurückführen. Auf diese Frage werden wir später kurz eingehen. Die Beschreibung und Deutung der in der Oberfläche beobachteten, z. T. recht komplizierten, Strukturen soll in weiteren Arbeiten erfolgen.

Wir wollen hier derartige Wände als gegeben hinnehmen und unter den unten angegebenen Voraussetzungen Untersuchungen über die Verteilung der Ladungen in diesen Wänden, sowie über Wanddicke und Wandenergie anstellen.

Becker<sup>1)</sup> untersuchte die Umkehr der Spinvektoren in einer  $180^\circ$ -Wand allein auf Grund der Wechselwirkung zwischen Austauschenergie und Kristallenergie. Danach stellen sich Minima der Wandenergie immer dann ein, wenn der Übergang in die antiparallele Vorzugslage parallel einer Ebene erfolgt, die die Anfangslage des Magnetisierungsvektors enthält.

<sup>1)</sup> R. Becker u. W. Döring, „Ferromagnetismus“. Springer-Verlag, 1939, S. 187 bis 192.



Néel<sup>2)</sup> zeigt des weiteren, daß im allgemeinen zur Einsparung großer magnetostatischer Energien die Umkehr der Magnetisierungsvektoren in den Blochwänden stets so erfolgen wird, daß dabei die Normalkomponente der Magnetisierung beim Durchgang durch die Wand konstant bleibt.

Auf 180°-Wände angewandt bedeutet dies, daß der Winkel  $\varphi$ , den die Magnetisierung mit der Wandnormalen bildet, stets 90° betragen muß. Mit

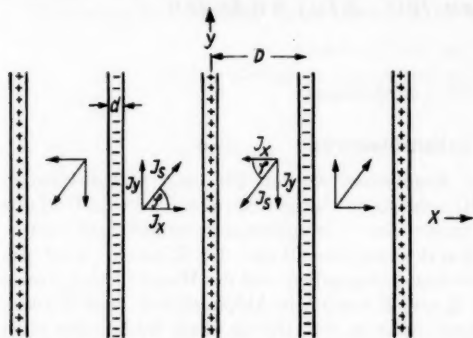


Abb. 1. Schnitt  $x$ - $y$  senkrecht zu den Ebenen der Blochwände. ( $J_s$  parallel  $x$ - $y$ )

wählen wir eine Konfiguration aus ebenen Wänden der Dicke  $d$  im äquidistanten Abstand  $D$ . Wir führen einen Schnitt  $xy$  senkrecht zu diesen Wänden (Abb. 1). Die Richtung der Wandnormalen fällt mit der  $x$ -Richtung zusammen. Die Magnetisierung außerhalb der Wand liegt in der  $xy$ -Ebene und bildet mit der Wandnormalen den Winkel  $\varphi$ . Sie zerfällt in die Komponenten

$$J_x = J_s \cos \varphi$$

$$J_y = J_s \sin \varphi,$$

deren Vorzeichen von Bezirk zu Bezirk wechselt. Wir setzen des weiteren unendlich ausgedehntes Material, einachsige Anisotropie (wie sie in unserem Fall durch genügend große Zugspannungen erzeugt wird) und eine äquidistante Drehung der Spinvektoren voraus.

Die Umkehr der Magnetisierungsvektoren in der Wand muß jetzt in der Weise erfolgen, daß die Summe  $E$  aus Anisotropieenergie  $E_A$ , Austauschenergie  $E_J$  und magnetostatischer Energie  $E_M$  ein Minimum wird. Dieses Problem ist in aller Allgemeinheit schwierig zu lösen. Wir untersuchen daher in den folgenden Ausführungen die Verhältnisse für drei charakteristische Wege der Magnetisierungsumkehr, im folgenden mit I, II und III bezeichnet.

Wir wollen zunächst diese drei Wege der Umkehr und die sich daraus ergebenden Ladungsverteilungen innerhalb der Blochwand jeweils für positiv geladene Wände beschreiben.

I. Die Umkehr der Spinvektoren soll parallel einer Ebene erfolgen, die senkrecht auf der  $xy$ -Ebene steht, und deren Spur in dieser Ebene mit der

<sup>2)</sup> L. Néel, Cahier de Physique, 25, 1 (1944).

Richt  
gehör  
der B

wobei  
jeweili  
eines  
 $\theta$  ( $-d$

Die u  
erhält

zu

Der V  
stellt.  
zeichn

pro cr

$2J_s \cos$   
gehöre

II.  
 $xy$ -Eb  
antipa

und m

Den V  
gibt K

liefert.  
Ladun  
auf, di  
Innerer

III.  
nehmen  
eines V  
sitzen.  
Bereich  
im Inn

Richtung der Magnetisierung zusammenfällt. Bei einer solchen Umkehr gehorcht die Komponente  $J_x$  der Magnetisierung unabhängig vom Drehsinn der Beziehung:

$$J_x(\theta) = J_s \cos \varphi \cos \theta, \quad (1)$$

wobei  $\theta$  den Winkel bedeutet, den die Magnetisierungsvektoren in der Wand jeweils mit der Anfangslage im Bezirk bilden. Auf Grund der Voraussetzung eines linearen Zusammenhanges zwischen  $\theta$  und  $x$  erhalten wir, wenn wir  $\theta(-d/2) = 0$  und  $\theta(d/2) = \pi$  setzen

$$\theta = \frac{\pi}{d} x + \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Die uns interessierende Ladungsdichte  $\varrho(x)$  im Inneren der Blochwand erhält man aus

$$\varrho(x) = -\operatorname{div} J_x = -\frac{dJ_x}{dx} \quad (3)$$

zu

$$\varrho(x) = \frac{\pi}{d} J_s \cos \varphi \cos \frac{\pi}{d} x \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq +\frac{d}{2}. \quad (4)$$

Der Verlauf der Ladungsdichte ist in Abb. 2 für  $\varphi = 60^\circ$  (Kurve I) dargestellt. Es entstehen bei dieser Art der Spinumkehr nur Ladungen eines Vorzeichens. Die Gesamtzahl dieser Ladungen

pro  $\text{cm}^2$  Wandfläche  $\int_{-d/2}^{+d/2} \varrho(x) dx$  ist gleich  $2J_s \cos \varphi$ . Die Felder, die zu diesen Ladungen gehören, spannen sich von Wand zu Wand.

II. Die Magnetisierung soll parallel der  $xy$ -Ebene entgegen dem Uhrzeigersinn in die antiparallele Vorzugslage übergehen.

$$J_x(\theta) = J_s \cos(\varphi + \theta) \quad (5)$$

und mit (2)

$$\varrho(x) = \frac{\pi}{d} J_s \cos\left(\frac{\pi}{d} x + \varphi\right). \quad (6)$$

Den Verlauf der Ladungsdichte für  $\varphi = 60^\circ$

gibt Kurve II in Abb. 2 wieder.  $\int_{-d/2}^{+d/2} \varrho(x) dx$

liefert auch hier die Zahl der unvermeidbaren

Ladungen  $2J_s \cos \varphi$ . Es treten aber jetzt im allgemeinen noch weitere Ladungen auf, die zu gleichen Teilen positiv und negativ sind und zu Streufeldern im Inneren der Blochwand führen.

III. Vom magnetostatischen Standpunkt aus ist es naheliegend anzunehmen, daß eine Spinumkehr energetisch günstig ist, bei der nur Ladungen eines Vorzeichens entstehen, die zudem auf den Rändern der Blochwand sitzen. Ladungen eines Vorzeichens entstehen immer dann, wenn  $\varrho(x)$  im Bereich der Blochwand keinen Nulldurchgang besitzt.  $J_x = f(x)$  darf also im Inneren der Blochwand kein Extremum aufweisen. Eine Verteilung der

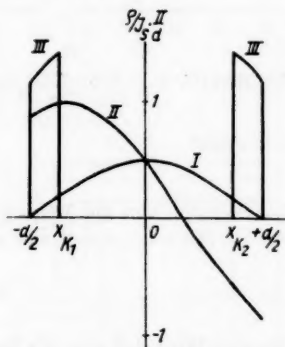


Abb. 2. Ladungsverteilung in der Blochwand für die drei Modelle I, II und III. ( $\varphi = 60^\circ$ ,  $d = \text{const}$ )

Ladungen auf die Ränder erhalten wir, wenn wir die Magnetisierungsumkehr in zwei aufeinander senkrechten Ebenen erfolgen lassen. Die Magnetisierung dreht zunächst parallel der  $xy$ -Ebene auf dem kürzesten Weg in die Wandebene ein. Die Stelle, an der die Magnetisierung in der  $xy$ -Ebene parallel zur Wand liegt, bezeichnen wir mit  $x_{k1}$ . Dann soll sich die Magnetisierung parallel zur Wandebene um  $180^\circ$  drehen. An der Stelle  $x_{k2}$  der Wand liegt die Magnetisierung wieder in der  $xy$ -Ebene, in der sie dann auf dem kürzesten Weg in die antiparallele Vorzugslage übergeht. Wir setzen nun noch voraus, daß die Drehung der Magnetisierung in beiden Ebenen in gleichen äquidistanten Schritten erfolgt. Dies erreichen wir, indem wir  $\theta \left( -\frac{d}{2} \right) = 0$  und

$\theta \left( \frac{d}{2} \right) = 2(\pi - \varphi)$  setzen. Im Bereich  $-\frac{d}{2} \leq x \leq x_{k1}$  ist dann:

$$J_{x1} = J_s \cos(\theta + \varphi), \quad (7)$$

und mit

$$\theta = (\pi - \varphi) \left( \frac{2x}{d} + 1 \right) \quad (8)$$

ist

$$\varrho_1(x) = -\frac{2J_s}{d}(\pi - \varphi) \sin \frac{2x}{d}(\pi - \varphi). \quad (9)$$

$x_{k1}$  ergibt sich aus (8) mit  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  zu

$$x_{k1} = -\frac{d}{4} \frac{\pi}{\pi - \varphi}. \quad (10)$$

Im Bereich  $x_{k1} \leq x \leq x_{k2}$  gilt:

$$J_{x2} = 0 \quad (11)$$

und damit

$$\varrho_2(x) = 0. \quad (12)$$

Den Winkel, den die Magnetisierung mit der  $y$ -Achse bildet, bezeichnen wir mit  $\varepsilon$ . Mit  $\varepsilon(x_{k1}) = 0$  und  $\varepsilon(x_{k2}) = \pi$  erhält man

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \frac{2(\pi - \varphi)}{d} x. \quad (13)$$

Für den Winkel  $\theta$ , den die Magnetisierung in diesem Bereich mit der leichten Richtung bildet, gilt dann:

$$\cos \theta = \sin \varphi \cos \varepsilon. \quad (14)$$

Im Bereich  $x_{k2} \leq x \leq +\frac{d}{2}$  gilt:

$$J_{x3} = -J_s \cos(\theta + \varphi) \quad (15)$$

und

$$\varrho_3(x) = \frac{2J_s}{d}(\pi - \varphi) \sin \frac{2x}{d}(\pi - \varphi) \quad (16)$$

und für den Knickpunkt  $x_{k2}$

$$x_{k2} = +\frac{d}{4} \frac{\pi}{\pi - \varphi}. \quad (17)$$

Bei dieser Spinumkehr entsteht also in der Mitte der Blochwand eine ladungs-  
freie Zone.

Es sind nun für diese drei Anordnungen die Energieanteile  $E_A$ ,  $E_J$  und  $E_M$  zu berechnen. Anschließend ist das Minimum der Gesamtenergie  $E = E_A + E_J + E_M$  aufzusuchen, wobei sich zwangsläufig die optimale Wand-  
dicke  $d_0$  ergibt. Diese Rechnungen sind im Anhang durchgeführt. Die Er-  
gebnisse sind in Tab. 1 zusammengestellt. In dieser sind die Formeln  
für die Energiedichten und Wanddicken zusätzlich in Abhängigkeit vom

Winkel  $\eta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  angegeben, da es bei den folgenden Betrachtungen zweck-  
mäßig ist, sich auf diese Größe zu beziehen.

Wir diskutieren nun die optimalen Wanddicken und die dazugehörigen  
Minima der Wandenergie. Dabei setzen wir zunächst stets  $D > d$  voraus.

In der Abb. 3 sind nach  
(39') (45') (48') die  
Wanddicken in Ein-  
heiten von  $d_N$  für  $Q =$   
(100 bzw.  $Q = 1$  in Ab-  
hängigkeit von  $\eta$  aufge-  
tragen ( $Q = 2\pi J_s^2/A$ ;  
 $A =$  Anisotropieenergie-  
konstante). Mit wach-  
sendem  $\eta$  nimmt die  
Dicke der Blochwände  
immer mehr zu. An den  
Stellen  $\eta_k$  ( $k = I, II, III$   
für  $Q = 100$  bzw.  $k =$   
 $I', II', III'$  für  $Q = 1$ )  
wird das Energiemini-  
mum durch eine unend-  
lich dicke Blochwand  
hergestellt. Für größere  
Werte von  $\eta$  existieren  
keine reellen Werte von  
 $d$ , die zu einem Energie-  
minimum führen. Die  
Wanddicke wird bei  
Konfiguration II durch  
das Auftreten von posi-  
tiven und negativen  
Ladungen gegenüber I  
und III erst bei größeren  
Werten von  $\eta$  unendlich.  
Bei Konfiguration III  
laufen die Wände schon  
bei kleineren Werten  
von  $\eta$  auseinander.  
Gegenüber II wird dies  
offenbar durch den An-

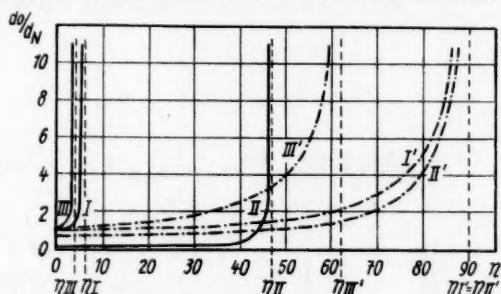


Abb. 3. Wanddicken in Einheiten von  $d_N$  in Abhängigkeit  
von  $\eta$  für die drei Modelle I, II und III. —  $Q =$   
 $2\pi J_s^2/A = 100$ ; - - -  $Q = 1$

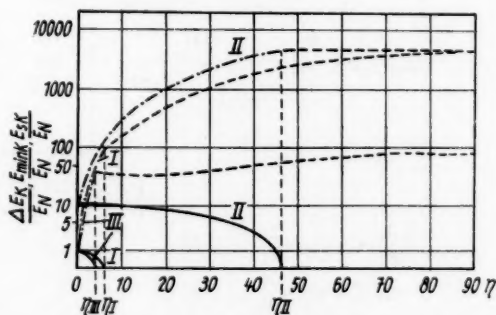


Abb. 4. Energiedichten in Abhängigkeit von  $\eta$  für die  
drei Modelle I, II und III  
—  $\Delta E_k/E_N$   $0 \leq \eta \leq \eta_k$ , - - -  $E_{\min,k}/E_N$   
 $0 \leq \eta \leq \eta_k$ , - - -  $E_{A,k}/E_N$   $\eta_k \leq \eta \leq 90^\circ$   
 $k = I, II, III$ . Die Kurven  $\frac{\Delta E_{J,k}}{E_N}$  gelten allgemein für  $Q =$   
100, während die übrigen Kurven unter Verwendung der  
für die hier durchgeführten Experimente an 50 Ni 50 Fe  
angegebenen Werte berechnet wurden.  $E_N = 10^3$  erg/cm<sup>3</sup>

Tabelle I

Modell	Ladungsverteilung im Bereich der Bloch wand	Optimale Wanddicke $d_0$ [cm]
I	$\frac{\pi}{d} J_s \cos \varphi \cos \frac{\pi}{d} x \quad (4)$	$d_{0I} = \left[ 1 - \frac{Q}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_I \cdot d_N \quad (39)$ $d_{0I'} = \left[ 1 - \frac{Q}{2} (1 + \cos 2\eta) \right]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{I'} \cdot d_N \quad (39')$
II	$\frac{\pi}{d} J_s \cos \left( \frac{\pi}{d} x + \varphi \right) \quad (6)$	$d_{0II} = [1 - Q \cos 2\varphi]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{II} \cdot d_N \quad (45)$ $d_{0II'} = [1 + Q \cos 2\eta]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{II'} \cdot d_N \quad (45')$
III	$-\frac{2J_s}{d}(\pi - \varphi) \sin \frac{2x}{d}(\pi - \varphi) - \frac{d}{2} \leq x \leq x_{k1} \quad (9)$  $0 \quad (11)$ $x_{k1} \leq x \leq x_{k2}$  $\frac{2J_s}{d}(\pi - \varphi) \sin \frac{2x}{d}(\pi - \varphi) \quad (16)$ $x_{k2} \leq x \leq +\frac{d}{2}$	$d_{0III} = \frac{\sqrt{2}(\pi - \varphi)}{\pi} \left[ \frac{0,25}{\pi - \varphi} \left( \frac{5\pi}{2} - 2\varphi + \frac{\pi}{2} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \right) - \frac{Q}{2} \left( \cos 2\varphi + \frac{1}{2(\pi - \varphi)} \cdot \left( \sin 2\varphi + \pi \right) \right) \right]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{III} \cdot d_N \quad (48)$  $d_{0III'} = \frac{\sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} + \eta \right)}{\pi} \left[ \frac{0,25}{\frac{\pi}{2} + \eta} \left( \frac{3\pi}{2} + 2\eta - \frac{\pi}{2} \cos 2\eta - \sin 2\eta \right) + \frac{Q}{2} \left( \cos 2\eta - \frac{1}{\pi + 2\eta} \cdot \left( \sin 2\eta + \pi \right) \right) \right]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{III'} \cdot d_N \quad (48')$

$$Q = \frac{M}{A}$$

$$M = 2\pi J_s^2$$

$$d_N = \pi \sqrt{\frac{2J}{aA}}$$

stieg der Austauschenergie, gleiches  $d$  vorausgesetzt, bewirkt. Für  $Q = 1$  liegen die Stellen  $\eta_k$  für alle drei Konfigurationen bei größeren Werten von  $\eta$  (für II und III bei  $\eta = 90^\circ$ ). Erst wenn  $Q$  noch kleinere Werte annimmt, können im gesamten Bereich  $0 \leq \eta \leq 90^\circ$  für alle drei Anordnungen reelle Wanddicken existieren.

Tabelle 1

Minimum der Energiedichte [erg/cm <sup>3</sup> ] $\eta \leq \eta_k$		Energiedichte [erg/cm <sup>3</sup> ] $\eta > \eta_k$	
(39) $E_{\min I} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi + E_N \cdot \frac{1}{\delta_I}$	(42)	$E_{sI} = \pi J_s^2 \cos^2 \varphi + \frac{A}{2} + \frac{J \pi^2}{D^2 a}$	(18)
(39') $E_{\min I'} = 2\pi J_s^2 \sin^2 \eta + E_N \cdot \frac{1}{\delta_{I'}}$	(42')	$E_{sI'} = \pi J_s^2 \sin^2 \eta + \frac{A}{2} + \frac{J \pi^2}{D^2 a}$	(18')
$\Delta E_I = E_N \cdot \frac{1}{\delta_{I'}}$	(42a)		
(45) $E_{\min II} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi + E_N \cdot \frac{1}{\delta_{II}}$	(46)	$E_{sII} = E_{sIII} = \pi J_s^2 + \frac{A}{2} + \frac{J \pi^2}{D^2 a}$	(19)
(45') $E_{\min II'} = 2\pi J_s^2 \sin^2 \eta + E_N \cdot \frac{1}{\delta_{II'}}$	(46')		
$\Delta E_{II} = E_N \cdot \frac{1}{\delta_{II}}$	(46a)		
$E_{\min III} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi + \frac{4(\pi - \varphi)^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\delta_{III}} \cdot E_N$	(49)	$E_{sIII} = A \left[ 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \left( \frac{\sin 2\varphi}{\pi - \varphi} + 1 \right) \right] + \frac{J \pi^2}{D^2 a}$	(20)
(48) $E_{\min III'} = 2\pi J_s^2 \sin^2 \eta + \frac{4\left(\frac{\pi}{2} + \eta\right)^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\delta_{III'}} \cdot E_N$	(49')	$E_{sIII'} = A \left[ 1 - \frac{\cos^2 \eta}{2} \left( \frac{\sin 2\eta}{\frac{\pi}{2} + \eta} + 1 \right) \right] + \frac{J \pi^2}{D^2 a}$	(20')
$\Delta E_{III} = E_N \cdot \frac{1}{\delta_{III'}} \cdot \frac{4\left(\frac{\pi}{2} + \eta\right)^2}{\pi^2}$	(49a)		
$E_s = \frac{\pi}{D} \sqrt{\frac{2JA}{a}} \quad \eta = \frac{\pi}{2} - \varphi$			

In den Abb. 4 und 5 ( $Q = 100$  bzw.  $Q = 1$ ) sind jeweils die Zusatzbeträge  $\Delta E_k$  ( $k = I, II, III$ ) der Energie zu  $2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi$  nach (42a) (46a) (49a) in Einheiten von  $E_N$  aufgetragen. (Zur Berechnung der Gesamtenergie ist neben  $Q = 2\pi J_s^2/A$  die Angabe weiterer Materialkonstanten erforderlich, s. unten.)

Reelle Energieminima existieren ebenfalls nur für  $\eta < \eta_k$ . An den Stellen  $\eta = \eta_k$  nehmen die Zusatzbeträge  $\Delta E_k$  den Wert 0 an. Für  $Q = 100$  ist im Bereich  $0 \leq \eta \leq \eta_k$  stets Konfiguration III, bei der die Ladungen auf den Rändern der Wand sitzen, von Vorteil. Bei  $Q = 1$  dominiert zunächst der Einfluß der Anisotropieenergie und bringt es mit sich, daß bis zu einem Winkel

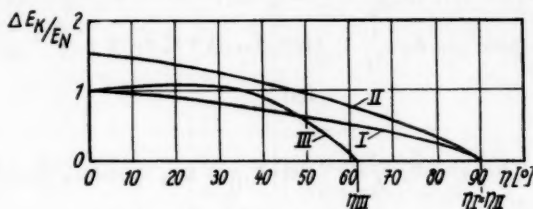


Abb. 5.  $\Delta E_k/E_N$   $0 \leq \eta < \eta_k$   $Q = 1$

von  $\eta = 48^\circ$  Konf. I etwas günstiger ist. Erst im Bereich  $48^\circ \leq \eta \leq 90^\circ$  überwiegt der Einfluß der magnetostatischen Energie und Konfiguration III setzt sich durch. Die Energieunterschiede zwischen den drei Anordnungen sind geringer geworden.

Zum Verständnis der weiteren Ausführungen ist es erforderlich, auf die Entstehungsursache derartiger geladener Blochwände, die eine starke Vermehrung der Wandenergie bedeuten, hinzuweisen.

Wenn keine Spannungen wirken, wird im Materialinneren eine energiesparende plattenförmige Bereichsstruktur verwirklicht sein, bei der die Magnetisierung in einer leichten Richtung parallel zur Blochwand liegt. Bei der Legierung 50% Ni 50% Fe konnten diese, durch die Kristallenergie bedingten Bereichsstrukturen bisher nicht sichtbar gemacht werden. Bei Überlagerung von Spannungen werden im allgemeinen zunächst Wandverschiebungsprozesse stattfinden. Nach deren Ablauf wird im Inneren wieder eine plattenförmige Konfiguration vorhanden sein, bei der die Magnetisierung parallel zur Wand in der leichten Richtung liegt, die den kleinsten Winkel mit der durch die Spannung geschaffenen Vorzugslage bildet<sup>3)</sup>. Bei weiterer Steigerung der Spannung kann die Magnetisierung nur durch einen Drehprozeß in die neue Vorzugslage übergehen<sup>4)</sup>. Da die Wände — wie das Experiment zeigt — dieser Drehbewegung nicht unmittelbar folgen, ist dabei im allgemeinen das Auftreten von Ladungen auf den Blochwänden unvermeidbar.

Wir setzen für die hier durchgeführten Betrachtungen voraus, daß die Wandebenen nach Ablauf der Wandverschiebungsprozesse starr in der plattenförmigen Anordnung bleiben (senkrecht zur  $xy$ -Ebene). Wie wir in weiteren Arbeiten zeigen werden, ist diese Annahme nur unter gewissen Voraussetzungen erfüllt.

Wir halten daher bei unseren Betrachtungen unabhängig von  $\eta$   $D$  konstant. Da die Wanddicken jeweils in der Gegend von  $\eta_k$  sehr stark ansteigen, kann man die Stellen  $\eta_D$ , an denen  $D = d$  wird, gleich  $\eta_k$  setzen.

<sup>3)</sup> L. J. Dijkstra u. U. M. Martius, Physic. Rev. (2) 85, 714 (1952), Nr. 4.

<sup>4)</sup> Bei der Legierung 50% Ni 50% Fe sind Spannungsenergie und Kristallenergie schon bei einer Spannung von 3 kp/mm<sup>2</sup> von gleicher Größenordnung.



Diese Beschränkung bedeutet für unsere drei Modelle folgendes:

#### Modell I

Unter der Voraussetzung, daß die Drehung der Spinvektoren in benachbarten Wänden im gleichen Sinn erfolgt, stabilisiert sich Modell I für alle Werte  $\eta > \eta_I$ . Die Blochwände können sich jetzt zum Herstellen des Energieminimums nicht weiter ausbreiten. Die Magnetisierung windet sich schraubenförmig unter dem Winkel  $\varphi$  um die Richtung der Wandnormalen. Aus (37) und mit  $d = D$  erhält man für die Energiedichte die Beziehung:

$$E_{sI} = \pi J_s^2 \cos^2 \varphi + \frac{A}{2} + \frac{J \pi^2}{a D^2}. \quad (18)$$

#### Modell II

Unter ähnlichen Voraussetzungen erhält man hier unter Verwendung von (44)

$$E_{sII} = \pi J_s^2 + \frac{A}{2} + \frac{J \pi^2}{a D^2} \quad (19)$$

#### Modell III

Die Drehung der Spinvektoren in den ladungsfreien Bereichen benachbarter Wände soll im gleichen Sinn erfolgen. Da in den gegenüberliegenden geladenen Rändern benachbarter Wände die Magnetisierungsvektoren in die Wandebene im entgegengesetzten Sinn eindrehen, verschwinden diese Bereiche an der Stelle  $\eta = \eta_{III}$ . Wir erhalten eine ladungsfreie Anordnung, bei der sich die Magnetisierung wie bei einer normalen  $180^\circ$ -Blochwand schraubenförmig unter einem Winkel von  $90^\circ$  um die Wandnormale windet. Die Energie dieser Spirale ergibt sich unter Verwendung von (30) und (35) zu

$$E_{sIII} = A \left[ 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \left( \sin \frac{2\varphi}{\pi - \varphi} + 1 \right) \right] + \frac{J \pi^2}{a D^2}. \quad (20)$$

In allen drei Fällen ist der durch eine homogene Magnetisierung definierte Bezirkscharakter verlorengegangen.

Wir führen jetzt die für unser Experiment charakteristischen Materialkonstanten ein. Für 50% Ni und 50% Fe wird mit  $I_s = 1200$  G  $M = 2 \pi J_s^2 = 9,08$  erg/cm<sup>3</sup>. Wählen wir  $\sigma$  zu 24 kp/mm<sup>2</sup>, so wird die Anisotropiekonstante  $A = \frac{3}{2} \lambda \sigma = 9,08 \cdot 10^4$  erg/cm<sup>3</sup> ( $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ) und damit  $Q = 100$ . Da die Konstante der Kristallenergie bei 10000 erg/cm<sup>3</sup> liegt, ist damit gleichzeitig der Fall überwiegender Spannungsisotropie gegeben. Das Austauschintegral berechnen wir nach Heisenberg<sup>5)</sup> aus:

$$k T_C = \frac{J}{1 - \sqrt{1 - 8/z}}$$

wobei  $T_C$  die Curietemperatur,  $k$  die Boltzmannsche Konstante und  $z$  die Zahl der nächsten Nachbarn bedeutet. Mit  $T_C = 810^\circ$  K und  $z = 12$  erhält man  $J = 4,65 \cdot 10^{-14}$  erg. Der Gitterparameter  $a$  beträgt  $3,6 \cdot 10^{-8}$  cm. Die beobachteten Werte von  $D$  lagen zwischen  $1 \dots 5 \cdot 10^{-3}$  cm.  $d_N$  errechnet sich dann nach (41) zu  $2,4 \cdot 10^{-5}$  cm ( $\sim 1/100 D$ ) und  $E_N$  unter Verwendung von (43) zu  $10^3$  erg/cm<sup>3</sup>.

<sup>5)</sup> W. Heisenberg, Z. Physik 49, 619 (1928).

Wir haben nun mit Hilfe dieser Werte die Gesamtenergie berechnet, für  $\eta < \eta_k$  nach (42'), (46'), (49') und für  $\eta > \eta_k$  nach (18'), (19), (20') (s. Abb. 4). Für die hier angegebenen Konstanten ist Konfiguration III energetisch von Vorteil, die an der Stelle  $\eta = 4^\circ$  in eine ladungsfreie Spirale übergeht. An dieser Stelle wird ungefähr der 40fache Wert der normalen Wandenergie erreicht. Mit steigendem  $\eta$  nimmt die Energie zunächst etwas ab. Sie erreicht bei  $\sim 20^\circ$  ihr Minimum ( $\sim 37 E_N$ ) und steigt dann wieder an.

Wir haben unsere Untersuchungen für eine unendlich ausgedehnte Probe durchgeführt. Durch den Schnitt mit der Oberfläche entstehen zusätzliche magnetostatische Felder. In Gebieten, in denen die Energieunterschiede zwischen den einzelnen Konfigurationen gering sind, wie zwischen I und III für  $\eta < \eta_{III}$  in Abb. 4, wird die Orientierung der Oberfläche einen starken Einfluß auf den Weg der Spinumkehr haben.

Da die Berechnung der Energie geladener Wände stark von ihrer geometrischen Anordnung abhängt, lassen sich die hier gewonnenen Ergebnisse quantitativ nicht allgemein für geladene Blochwände anwenden.

Im Fall der dolchförmigen Abschlußbereiche von Kobalt z. B., die sich zur Herabsetzung der magnetostatischen Oberflächenfelder ausbilden, kann man nur qualitativ vermuten, daß infolge des größeren Faktors  $Q \sim 3$  ( $K = 4 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^3$ ;  $J_s = 1420 \text{ G}$ ) das Auseinanderlaufen der Blochwände erst bei größeren Werten von  $\eta$  erfolgen wird. Da die Energieunterschiede zwischen allen drei Konfigurationen geringer sind (vgl. Abb. 5), wird es besonders empfindlich von der Orientierung der Oberfläche abhängen, welche von drei Anordnungen bevorzugt ist. Unter Umständen kann hier sogar Konfiguration III von Vorteil werden.

## Anhang

### Berechnung der Wandenergien und Wanddicken

#### 1. Magnetostatische Energie $E_M$

Die Dichte der magnetostatischen Energie kann man in der Form

$$E_M = -\frac{1}{V} \cdot \frac{1}{2} \iiint H J dV \quad (21)$$

schreiben. In unserem Fall ändert sich die Magnetisierung nur in der  $x$ -Richtung. Die Poissonsche Gleichung gewinnt dann die Gestalt:

$$\frac{\delta H_x}{\delta x} = 4\pi \varrho = -4\pi \frac{\delta J_x}{\delta x} \quad (22)$$

und daraus:

$$H_x = -4\pi J_x + \text{const.} \quad (23)$$

Für die magnetostatische Energie pro  $\text{cm}^3$  erhält man dann<sup>6)</sup>:

$$E_M = \frac{2\pi}{D} \int_{-D/2}^{+D/2} J_x^2 dx \quad (24)$$

<sup>6)</sup> Das mit dem Faktor const behaftete Glied hebt sich jeweils bei Integration über 2 Bezirke heraus.

wobei stets im Bereich  $-D + \frac{d}{2} \leq x \leq -\frac{d}{2}$  und  $\frac{d}{2} \leq x \leq D - \frac{d}{2}$

$$J_x = \pm J_s \cos \varphi \quad (25)$$

ist.

Ersetzt man die Blochwand durch infinitesimale Ebenen, so wird

$$E_{Mi} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi. \quad (26)$$

Dieser Ausdruck für die magnetostatische Energiedichte erhält nun durch Berücksichtigung der endlichen Blochwanddicke kleine Zusatzglieder. Nach (1), (2) und (24) erhält man für Modell I

$$E_{MI} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi - \pi J_s^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{d}{D}. \quad (27)$$

Für Modell II ergibt sich mit (2), (5) und (24)

$$E_{MII} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi - \pi J_s^2 \cos 2\varphi \cdot \frac{d}{D}. \quad (28)$$

Für  $\varphi = 0^\circ$  wird wie zu erwarten  $E_{MI} = E_{MII}$ .

Mit (7), (8) und (24) erhält man für Modell III

$$E_{MIII} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi - \pi J_s^2 \cdot \frac{d}{D} \left\{ \frac{1}{2(\pi - \varphi)} (\sin 2\varphi + \pi) + \cos 2\varphi \right\}. \quad (29)$$

Für  $\varphi \rightarrow 90^\circ$  geht  $E_{MIII} \rightarrow 0$ .

## 2. Anisotropieenergie $E_A$

Im Fall einachsiger Anisotropie beträgt die Anisotropieenergie pro  $\text{cm}^3$

$$E_A = \frac{A}{D} \int_{-d/2}^{+d/2} \sin^2 \theta dx \quad (30)$$

$A$  = Konstante der Anisotropieenergie.

Unter Verwendung von (2) ergibt sich für Modell I und II

$$E_{AI} = E_{AII} = \frac{A}{2} \cdot \frac{d}{D} \quad (31)$$

und mit (8), (13) und (14) für Modell III

$$E_{AIII} = \frac{A}{4} \frac{d}{D} \frac{1}{\pi - \varphi} \left[ \frac{5\pi}{2} - 2\varphi + \frac{\pi}{2} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \right]. \quad (32)$$

Dieser Ausdruck geht für  $\varphi = 90^\circ$ , wie zu erwarten in  $\frac{A}{2} \cdot \frac{d}{D}$  über.

Es sei darauf hingewiesen, daß bei gleichem  $d$ , z. B. für  $\varphi = 0^\circ$  die Anisotropieenergie in der Anordnung III gegenüber den Anordnungen I und II nur um den Faktor 1,5 zunimmt.

## 3. Austauschenergie $E_J$

Die Austauschenergie eines Spinpaares beträgt für den Spin 1

$$e_J = J \psi^2, \quad (33)$$

wobei das Austauschintegral  $J$  den Energieunterschied zwischen Parallelstellung und Antiparallelstellung des Spinpaares angibt und  $\psi$  den Winkel zwischen benachbarten Spins. Die Austauschenergie pro  $\text{cm}^3$  beträgt dann:

$$E_J = \frac{J \psi^2 d}{a^3 D}, \quad (34)$$

wobei  $a$  die Gitterkonstante bedeutet.

Für I und II ergibt sich mit  $\psi = \frac{\pi \cdot a}{d}$

$$E_{JI} = E_{JII} = \frac{J \pi^2}{a d D} \quad (35)$$

und für III mit  $\psi = \frac{2\pi - 2\varphi}{d} \cdot a$

$$E_{JIII} = \frac{4J(\pi - \varphi)^2}{a d D}. \quad (36)$$

Für  $\varphi = 0^\circ$  ( $d = \text{const}$ ) steigt die Austauschenergie gegenüber  $E_{JI}$  bzw.  $E_{JII}$  um den Faktor vier an.

Nachdem wir die einzelnen Energieanteile für die drei Konfigurationen berechnet haben, wollen wir die optimalen Wanddicken und damit die Minima der Wandenergie aufsuchen.

I. Die Gesamtenergie beträgt:

$$E_I = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi - \pi J_s^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{d}{D} + \frac{A}{2} \frac{d}{D} + \frac{J \pi^2}{a d D}. \quad (37)$$

Aus

$$\frac{\delta E_k}{\delta d} = 0 \quad (k = \text{I, II, III}) \quad (38)$$

erhalten wir für die optimale Wanddicke die Beziehung:

$$d_{0I} = \left[ 1 - \frac{Q}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_I \cdot d_N, \quad (39)$$

wobei

$$Q = 2\pi J_s^2 / A \quad (40)$$

gesetzt ist.

$$d_N = \pi \sqrt{\frac{2J}{aA}} \quad (41)$$

stellt die Dicke einer normalen Blochwand ( $\varphi = 90^\circ$ ) dar. Setzen wir (45) in (37) ein, so ergibt sich:

$$E_{\min I} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi + E_N \cdot \frac{1}{\delta_I}, \quad (42)$$

wobei

$$E_N = \frac{\pi}{D} \sqrt{\frac{2JA}{a}} \quad (43)$$

die Energiedichte von normalen  $180^\circ$ -Blochwänden darstellt.

II. Aus

$$E_{II} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi - \pi J_s^2 \cos 2\varphi \cdot \frac{d}{D} + \frac{A}{2} \cdot \frac{d}{D} + \frac{J \pi^2}{a d D} \quad (44)$$

und (38) folgt

$$d_{0II} = [1 - Q \cos 2\varphi]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{II} \cdot d_N. \quad (45)$$

Das Minimum der Energie ergibt sich hier ebenfalls in der Form:

$$E_{\min II} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi + E_N \cdot \frac{1}{\delta_I}. \quad (46)$$

III. Aus

$$E_{III} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi - \pi J_s^2 \cdot \frac{d}{D} \left( \cos 2\varphi + \frac{1}{2(\pi - \varphi)} \{ \sin 2\varphi + \pi \} \right) + \frac{Ad}{4} \cdot \left[ \frac{5\pi}{2} - 2\varphi + \frac{\pi}{2} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \right] + \frac{4J(\pi - \varphi)^2}{da} \quad (47)$$

und (38) folgt

$$d_{0III} = \frac{\sqrt{2}(\pi - \varphi)}{\pi} \left[ \frac{0,25}{\pi - \varphi} \left( \frac{5\pi}{2} - 2\varphi + \frac{\pi}{2} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \right) - \left( \frac{Q}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2(\pi - \varphi)} \{ \sin 2\varphi + \pi \} \right) \right]^{-1/2} \cdot d_N = \delta_{III} \cdot d_N. \quad (48)$$

Das Energieminimum ergibt sich dann zu:

$$E_{\min III} = 2\pi J_s^2 \cos^2 \varphi + \frac{4(\pi - \varphi)^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\delta_{III}} \cdot E_N. \quad (49)$$

Herrn Prof. Dr. M. Steenbeck danke ich für wertvolle Hinweise, Herrn Dr. W. Andrä für fördernde Diskussionen.

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 17. April 1959.

# Die unitäre Feldtheorie der Schwere und Elektrizität

Von Jaroslav Pachner

## Inhaltsübersicht

Nach kurzer kritischer Übersicht über die verschiedenen unitären Feldtheorien, die eine Weiterentwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein darstellen, werden die Grundlagen der vierdimensionalen unitären Theorie der Schwere und Elektrizität erörtert. Die Feldgleichungen, die eine der modifizierten Delta-Funktion proportionale Materietensordichte und elektrische Stromvektordichte enthalten, werden von einem heterogenen Hamiltonian abgeleitet, ihre Kompatibilität und Vollständigkeit nachgewiesen und auf Grund der Maxwellschen Näherung ihre physikalische Interpretation gegeben. Die  $1 + 1 + 4$ -Identitäten, die die Anzahl der unabhängigen Feldgleichungen erniedrigen, werden als Erhaltungssätze interpretiert. Die Bewegungsgleichungen werden aus den Feldgleichungen mit der neuen Methode von Infeld abgeleitet, für den Fall der Bewegung von zwei Körpern in niedrigster Näherung explizite angegeben und für den Fall der Bewegung eines elektrisch geladenen Probekörpers integriert. Zum Schluß der Arbeit wird ein Fundamentalsystem von Einheiten gebildet, in dem alle physikalischen Größen mit dimensionslosen Zahlen gemessen werden, der Zusammenhang der Naturkonstanten untersucht und eine neue Hypothese aufgestellt, nach der die von Null verschiedene Größe der Kopplungskonstante zwischen dem Gravitations- und elektromagnetischen Anteil des unitären Feldes durch den diskontinuierlichen Charakter der elektrischen Ladung bedingt ist.

## Einleitung

In seinen vorangehenden 6 Artikeln<sup>1)</sup> hat der Verfasser einen Versuch gemacht, die vierdimensionale unitäre Feldtheorie der Schwere und Elektrizität aus einem heterogenen Hamiltonian zu entwickeln. Dabei hat er nur die Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit verwendet. Es hat sich aber gezeigt, daß die Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit eine schwierige mathematische Aufgabe ist, sobald man die Newtonsche Näherung übersteigt, bzw. sobald man die Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens berechnen will. Es wird deshalb zweckmäßig, die neue Methode von Infeld<sup>2)</sup> zur Ableitung der Bewegungsgleichungen aus der allgemeinen Relativitätstheorie auf die vorliegende unitäre Feldtheorie auszudehnen. Da Infeld in seiner neuen Methode die der modifizierten Diracschen Delta-Funktion proportionale Materietensordichte benützt,

<sup>1)</sup> J. Pachner, Ann. Physik **19**, 353 (1957); **20**, 368 (1958) **1**, 110, 201, 351 (1958); **2**, 36 (1958). Diese Arbeiten werden als bzw. I, ... VI und die Gleichungen als bzw. (I, ...) ... (VI, ...) bezeichnet.

<sup>2)</sup> L. Infeld, Acta Phys. Polon. **13**, 187 (1954).

so entsteht zuerst die Aufgabe, die Feldgleichungen der unitären Theorie in der vorliegenden Arbeit so abzuleiten, daß die Materietensordichte und elektrische Stromvektordichte in ihnen der modifizierten Delta-Funktion proportional werden.

Die vorliegende Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung der unitären Feldtheorie der Schwere und Elektrizität, in der auch gewisse Unklarheiten aus den vorangehenden Aufsätzen beseitigt und eine neue, zweckmäßigere Bezeichnungsweise benützt werden.

### Kurze Übersicht über die unitären Feldtheorien

Die verschiedenen unitären Feldtheorien der Schwere und Elektrizität, die nach dem ersten, erfolglosen Versuch von Weyl<sup>3)</sup> entstanden sind und eine Weiterentwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein<sup>4)</sup> darstellen, kann man in zwei Gruppen aufteilen, in die fünf- und in die vierdimensionalen Theorien.

In den fünfdimensionalen Theorien ist der fünfdimensionale Raum ein Hilfskontinuum, in dem die Geometrie einen geeigneten mathematischen Formalismus zur geometrischen Interpretation der Gesetze der Gravitationstheorie von Einstein zusammen mit der elektromagnetischen Theorie von Maxwell bildet. Kaluza<sup>5)</sup> war der erste, der solche Theorie entwickelte, deren Feldgleichungen in der ersten Näherung in die der Einsteinschen und der Maxwellschen Theorie übergehen. Klein<sup>6)</sup> hat diese Theorie in der Richtung weiterentwickelt, daß die Feldgleichungen von Einstein-Maxwell aus ihr nicht in angenäherter, sondern in genauer Form folgten. Die mathematisch elegantere Version der Theorie von Kaluza-Klein stellt die projektive Relativitätstheorie von Veblen<sup>7)</sup> dar. Veblen selbst aber unterstreicht<sup>8)</sup>, daß seine Theorie, obwohl sie eine vollkommene Übereinstimmung mit der Theorie von Kaluza-Klein zeigt, von ganz verschiedenen physikalischen und geometrischen Standpunkten ausgeht. Das gemeinsame Zeichen der Theorien von Kaluza-Klein und von Veblen ist, daß ihre Feldgleichungen und Bewegungsgleichungen eines elektrisch geladenen Probeteilchens mit denen der Theorie von Einstein-Maxwell übereinstimmen<sup>9)</sup>. Diese Theorien stellen also nur eine neue Interpretation der Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell in quasigeometrischer Ausdrucksweise dar, ohne ihren physikalischen Inhalt zu ändern.

Eine andere Form der fünfdimensionalen unitären Feldtheorie wurde von Jordan<sup>10)</sup> und von Thirry<sup>11)</sup> entwickelt, indem die Zylindrizitätsbedingung von Kaluza  $g_{55} = -1$  durch die Gleichung  $g_{55} = -\xi^2$  ersetzt wurde, wobei  $\xi^2$  als eine der veränderlichen Gravitationskonstante proportionale Größe interpretiert wurde. Beide Theorien, die von Jordan und die von Thirry, unter-

<sup>3)</sup> H. Weyl, S.-B. Berlin. Akad. 465 (1918); Ann. Physik 59, 101 (1919). Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., Berlin 1923.

<sup>4)</sup> A. Einstein, Ann. Physik 49, 769 (1916).

<sup>5)</sup> T. Kaluza, S.-B. Berlin. Akad. 966 (1921).

<sup>6)</sup> O. Klein, Z. Physik 37, 895 (1926); 46, 188 (1927).

<sup>7)</sup> O. Veblen, Projektive Relativitätstheorie. Berlin 1933.

<sup>8)</sup> Siehe Fußnote 7), S. 5.

<sup>9)</sup> Siehe Fußnote 7), S. 52.

<sup>10)</sup> P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, 2. Aufl. Braunschweig 1955.

<sup>11)</sup> Y. Thirry, C. R. Acad. Sci. Paris 226, 216, 1881 (1948).



scheiden sich nur durch den verwendeten mathematischen Formalismus. Jordan benützt die Methoden der projektiven Geometrie, Thirry arbeitet dagegen mit der Riemannschen fünfdimensionalen Geometrie. Fierz<sup>12)</sup> hat aber gezeigt, daß die Theorie von Jordan-Thirry in ihrer heutigen Form zur eindeutigen Interpretation weder der Funktion  $\xi^2$  als der der veränderlichen Gravitationskonstante proportionalen Quantität, noch der Größen  $g_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ ) als der Komponenten des metrischen Tensors führt.

Einen ganz anderen Weg wählte Klein<sup>13)</sup>. Er lehnte in der ursprünglichen Theorie von Kaluza-Klein die Bedingung ab, daß ihre Feldgleichungen von der fünften Veränderlichen nicht abhängen sollen, die in seiner neuen Theorie eine quantentheoretische Bedeutung hat. Es scheint aber dem Verfasser jeder Versuch einer quantisierten unitären Theorie als verfrüht, solange eine allgemein anerkannte Theorie der Elementarteilchen nicht gebildet ist.

Lichnerowicz<sup>14)</sup> charakterisiert zusammenfassend alle diese fünfdimensionalen Theorien als solche, deren physikalische Interpretation klar ist, an denen man aber aussetzen kann, daß sie nicht genügend unitär sind. Die vierdimensionalen Theorien, die von hier ab besprochen werden, sind so unitär wie man sich nur wünschen kann, die physikalische Interpretation der geometrischen Felder ist in ihnen aber eine äußerst schwierige Aufgabe.

Zuerst erwähnen wir einige Versuche von Eisenhart<sup>15)</sup> aus der letzten Zeit um die Bildung der vierdimensionalen unitären Theorie. Er geht in seinen Arbeiten von der Annahme aus, daß die Koeffizienten der affinen Konnexion der Summe des bekannten Christoffelschen Symbols und eines gewissen Tensor gleich sind. Je nach der gemachten Annahme über diesen Tensor erhält er verschiedene Varianten seiner unitären Theorie. Ihr gemeinsames Zeichen ist, daß die resultierenden Feldgleichungen mit denen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell identisch sind. Den Grund für die Bildung seiner unitären Theorie sieht Eisenhart darin, daß er dadurch den Vorwurf von Einstein<sup>16)</sup> beseitigt hat, daß das Gravitations- und elektromagnetische Feld in die Gleichungen der Theorie von Einstein-Maxwell als zwei logisch verschiedene Strukturen eintreten. Da die Theorie von Eisenhart keine neuen physikalischen Ergebnisse bringt, kann man sie für ein vierdimensionales Analogon der fünfdimensionalen Theorien von Kaluza-Klein und Veblen halten.

Der Grundgedanke der vierdimensionalen unitären Theorien, in den die Vereinigung des Gravitations- und elektromagnetischen Feldes in das eine unitäre Feld zu neuen physikalischen Konsequenzen führt, geht auf Eddington<sup>17)</sup> zurück. Er war der erste, der darauf hingewiesen hat, daß die unitäre Theorie nicht auf der Grundlage der Riemannschen, sondern der allgemeineren Geometrie der affinen Konnexion aufgebaut werden sollte. Er hat sich nur

<sup>12)</sup> M. Fierz, *Helv. phys. Acta* **29**, 128 (1956).

<sup>13)</sup> O. Klein, *Arkiv. Mat. Astron. Fysik* (B) **34 A** No. 1 (1946).

<sup>14)</sup> A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* Paris 1955, S. 152.

<sup>15)</sup> L. P. Eisenhart, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42**, 249, 646, 878 (1956); **43**, 333 (1957).

<sup>16)</sup> A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, 4th edition, Princeton 1953, S. 98.

<sup>17)</sup> A. S. Eddington, *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*. Berlin 1925, S. 317ff.

auf allgemeine Überlegungen beschränkt, die Feldgleichungen hat Einstein<sup>18)</sup> abgeleitet. Dieser hat aber bald seine Theorie verlassen, da sie zu unzulässigen Konsequenzen führte. Der Grund für diesen Mißerfolg lag in der Annahme von Eddington, die auch Einstein übernommen hat, daß die Koeffizienten der affinen Konnexion symmetrisch sind. Erst viele Jahre später sind Einstein und Schrödinger zu bedeutsamen Erfolgen auf dem Wege zur Aufstellung einer unitären Feldtheorie gekommen, nachdem sie die aus der allgemeinen Relativitätstheorie übernommene Annahme von Eddington verlassen hatten.

Fast in derselben Zeit haben Einstein<sup>19)</sup> und Schrödinger<sup>20)21)</sup> ihre unitären Theorien aufgestellt. Beide gehen von der Annahme der nicht-symmetrischen Koeffizienten der affinen Konnexion aus, aber Einstein hat seine Theorie sowohl auf den Koeffizienten der affinen Konnexion als auch auf dem nichtsymmetrischen Fundamentaltensor aufgebaut, während Schrödinger als das primäre Feld nur die Koeffizienten der affinen Konnexion eingeführt hat, aus welchen er die Komponenten des Fundamentaltensors ableitete. Trotzdem erhielten Einstein und Schrödinger die Feldgleichungen, die sich nur durch das bekannte kosmologische Glied unterscheiden, das in die Theorie von Schrödinger neu auftritt.

Nach dem Aufbau der mathematischen Grundlagen der unitären Theorie von Einstein-Schrödinger sind noch zwei schwierige Fragen zu lösen geblieben, die geometrischen Felder richtig physikalisch zu interpretieren und die Bewegungsgleichungen abzuleiten.

Aus der Arbeit von Wyman<sup>22)</sup> ebenso wie aus dem Buch von M<sup>me</sup> Tonnelat<sup>23)</sup> erkennen wir, wie beschwerlich es ist, die erste Frage zu beantworten. Auch bei der Lösung des zweiten Problems ist Infeld<sup>24)</sup> auf unerwartete Schwierigkeiten gestoßen. Wenn er die bekannte Methode von Einstein-Infeld<sup>25)</sup> zur Ableitung der Bewegungsgleichungen direkt aus den Feldgleichungen in der unitären Theorie von Einstein verwendete, wurde festgestellt, daß die Bewegung eines elektrisch geladenen Körpers vom elektromagnetischen Feld in der niedrigsten Näherung überhaupt nicht beeinflusst wird. Zu demselben überraschenden Ergebnis ist später auch Callaway<sup>26)</sup> gekommen.

Auf Grund dieser Ergebnisse und ausführlicher Diskussionen hat Bonnor<sup>27)</sup> den Hamiltonian der Einsteinschen unitären Theorie so geändert, daß in

<sup>18)</sup> A. Einstein, S.-B. Berlin. Akad. 32, 76, 137 (1923). Siehe auch Fußnote 17, S. 359ff.

<sup>19)</sup> A. Einstein, Ann. Math. 46, 578 (1945); Rev. mod. Physics 20, 35 (1948); Canad. J. Math. 2, 120 (1950); A. Einstein u. E. G. Straus, Ann. Math. 47, 731 (1946). Siehe auch Fußnote 16, Appendix II, Supplement to Appendix II.

<sup>20)</sup> E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad. A 49, 43 (1943); 237, 275 (1944); A 51, 44 (1946), 163 (1947); 205 (1948), A 52, 1 (1948); A 54, 79 (1951).

<sup>21)</sup> E. Schrödinger, Space-Time-Structure, Cambridge 1950, S. 112.

<sup>22)</sup> M. Wyman, Canad. J. Math. 2, 427 (1950).

<sup>23)</sup> M<sup>me</sup> N. A. Tonnelat, La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements. Paris 1955. S. 89.

<sup>24)</sup> L. Infeld, Acta Phys. Polon. 10, 284 (1950).

<sup>25)</sup> A. Einstein u. L. Infeld, Cand. J. Math. 1, 209 (1949).

<sup>26)</sup> J. Callaway, Physic. Rev. 92, 1567 (1953).

<sup>27)</sup> W. B. Bonnor, Proc. Roy. Soc. (London) A 226, 366 (1954).

den Bewegungsgleichungen in der niedrigsten Näherung nicht nur die Newtonsche, sondern auch die Coulombsche Kraft erscheint.

Von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus löst Hlavatý beide Probleme. Eine Reihe seiner Abhandlungen<sup>28)</sup> sowie sein Buch<sup>29)</sup> stellen die bisher eingehendste geometrische Bearbeitung der unitären Theorie von Einstein dar. Hlavatý weist nach<sup>30)</sup>, daß in der unitären Theorie von Einstein nur ein schiefssymmetrischer Tensor existiert, der eine Funktion der schiefssymmetrischen und symmetrischen Komponenten des Fundamentaltensors ist und dessen zyklische Divergenz verschwindet. Er identifiziert dann diesen Tensor mit dem des elektromagnetischen Feldes und erklärt zwei Systeme von vier Differentialgleichungen, die Einstein gefunden hat, für beide Systeme der Maxwell'schen Gleichungen. Hlavatý leitet noch einen weiteren Tensor ab, den er für den Energie-Impuls-Tensor hält. Die Bewegungsgleichungen erhält er als die Folge des Erhaltungssatzes für Energie und Impuls. Die Verwendung der Methode von Einstein-Infeld zur Ableitung der Bewegungsgleichungen<sup>25)</sup> hält Hlavatý, in Übereinstimmung mit der Meinung von Einstein aus der letzten Zeit vor seinem Tode<sup>31)</sup>, nicht für angemessen in der unitären Theorie.

Mit den Ansichten von Hlavatý über die Ableitung der Bewegungsgleichungen polemisierte schon Bonnor<sup>32)</sup>. Wenn man heute noch bedenkt, daß die von Hlavatý abgeleiteten Bewegungsgleichungen im verschwindend schwachen elektromagnetischen Feld mit denen der allgemeinen Relativitätstheorie nicht übereinstimmen<sup>33)</sup>, so daß sich Hlavatý selbst gezwungen fühlte, die Feldgleichungen der ursprünglichen unitären Theorie von Einstein doch abzuändern, so haben wir darin schon die erste Rechtfertigung einer auf heterogenem Hamiltonian aufgebauten unitären Theorie.

Den zweiten Grund für eine so entwickelte Theorie hat der Verfasser schon in der Arbeit VI ausgesprochen. Ebenso wie die allgemeine Relativitätstheorie in sich die Newtonsche Gravitationstheorie als einen Spezialfall enthält, so muß man erwarten, daß auch die richtige unitäre Theorie im starken Gravitations- und schwachen elektromagnetischen Feld in die Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell übergeht. Die unitäre Theorie von Einstein-Schrödinger kann diesem Postulat nie genügen, wohl aber die vom Verfasser entwickelte Theorie.

Den dritten Grund, der die Theorie vom Verfasser rechtfertigt, aber nur von hypothetischem Charakter ist, können wir zusammen mit Einstein<sup>34)</sup> im Glauben an die Einfachheit und Verständlichkeit der Natur sehen. Da die vorliegende Theorie nämlich genau drei Naturkonstanten enthält, die Gravitationskonstante von Newton, die Lichtgeschwindigkeit und eine neue Kopplungskonstante zwischen dem Gravitations- und elektromagnetischen Anteil des unitären Feldes, so ist es möglich, mit deren Hilfe ein Fundamental-

<sup>28)</sup> V. Hlavatý, J. Rat. Mech. Anal. 1, 539 (1952); 2, 1 (1953); 3, 103, 147, 645 (1954); 4, 247, 653 (1955); 5, 419 (1956).

<sup>29)</sup> V. Hlavatý, Geometry of Einsteins Unified Field Theory, Groningen 1958.

<sup>30)</sup> Siehe Fußnoten 28, 29 oder V. Hlavatý, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 2, 103 (1954).

<sup>31)</sup> Nach der Korrespondenz des Verfassers mit Prof. Hlavatý.

<sup>32)</sup> W. B. Bonnor, Ann. Inst. H. Poincaré 15, 133 (1957).

<sup>33)</sup> Siehe Fußnote 29, S. 183ff.

<sup>34)</sup> A. Einstein, Autobiographisches. Illinois 1949.

system  
sionslo  
Heise  
sind, s  
zwischen  
den ma  
dieser  
beding  
Die  
allgeme  
sich vo  
schiefs  
gehend  
tion de  
geführt  
matisch

Wie  
einem  
es folge  
Bevor  
wir un  
halten  
ihrer I  
Teilche  
geben

Die  
der all  
Einste  
der Fel  
verschi  
zu find  
unitäre  
gleichu

Die  
betrach  
des uni  
werden

<sup>35)</sup> V  
<sup>36)</sup> A  
A. Eins  
<sup>37)</sup> A  
21, 414  
<sup>38)</sup> N  
<sup>39)</sup> S

system von Einheiten zu bilden, in dem alle physikalischen Größen mit dimensionslosen Zahlen gemessen werden. Nimmt man noch die Hypothese von Heisenberg<sup>35)</sup> hinzu, daß alle Naturkonstanten auf drei zurückzuführen sind, so existiert, wie wir unten zeigen werden, ein gewisser Zusammenhang zwischen der neuen Naturkonstante und der elementaren elektrischen Ladung, den man auch so aussprechen könnte, daß die von Null verschiedene Größe dieser Konstante durch die Existenz der elementaren elektrischen Ladung bedingt ist.

Die vorliegende unitäre Theorie ist die natürlichste Weiterentwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell. Sie unterscheidet sich von der Theorie von Bonnor<sup>27)32)</sup> durch eine andere Identifizierung der schiefssymmetrischen Komponenten des Fundamentaltensors, die unten eingehend gerechtfertigt wird. Im Vergleich mit der physikalischen Interpretation der Theorie von Einstein, wie Hlavatý in seinem Prinzip C sie durchgeführt hat, ist die vorliegende Theorie bedeutend übersichtlicher und mathematisch einfacher.

## Die Grundlagen der unitären Theorie

### Die physikalischen Grundlagen

Wie bekannt, gewährleistet uns die Ableitung der Feldgleichungen aus einem kovarianten Variationsprinzip nicht nur ihre Kompatibilität, sondern es folgen aus ihm zugleich vier wichtige Identitäten unter den Feldgleichungen. Bevor wir zur Wahl des Ausdrucks für die Feldwirkung herantreten, müssen wir uns entscheiden, ob wir die unitäre Theorie für eine reine Feldtheorie halten (was die Meinung von Einstein war) und singularitätenfreie Lösungen ihrer Feldgleichungen suchen, oder ob die Quellen des unitären Feldes die Teilchen sein sollen, für deren Wirkung einen analytischen Ausdruck anzugeben zweckmäßig ist.

Die Antwort auf diese Frage gibt uns die Diskussion der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie<sup>36)</sup> sowie die der unitären Theorie von Einstein<sup>37)</sup>, aus welcher folgt, daß die singularitätenfreie statische Lösung der Feldgleichungen nicht existiert, die das Feld eines Teilchens mit von Null verschiedener Ruhmasse beschreiben würde. Die Bestrebung, solche Lösung zu finden, war der eine von Gründen, der Bonnor zur Entwicklung seiner unitären Theorie führte<sup>38)</sup>. Eine singularitätenfreie Lösung seiner Feldgleichungen ist aber auch noch nicht bekannt.

Die vorliegende unitäre Theorie ist keine reine Feldtheorie, denn wir betrachten, im Gegensatz zu Schrödinger<sup>39)</sup>, die Teilchen für die Quellen des unitären Feldes. Diese sind mit dem Feld untrennbar verbunden und werden in ihrer Bewegung durch das Feld gegenseitig beeinflusst.

<sup>35)</sup> W. Heisenberg, Naturwiss. 45, 227 (1958).

<sup>36)</sup> A. Einstein, Revista (Universidad Nacional da Tucuman) A 2, 11 (1941).  
A. Einstein u. W. Pauli, Ann. Math. 44, 131 (1943).

<sup>37)</sup> A. Papapetrou, Physic. Rev. 73, 1105 (1948); E. G. Straus, Rev. mod. Physics 21, 414 (1949).

<sup>38)</sup> Nach der Korrespondenz des Verfassers mit Prof. Bonnor.

<sup>39)</sup> Siehe Fußnote 21, S. 99.

Bei der Entwicklung unserer Theorie werden wir aber stets von der Feldwirkung ausgehen und dieser die Teilchenwirkung anpassen<sup>40)</sup>. Dieser logische Widerspruch ist aber nur scheinbar und wird beseitigt, wenn wir bedenken, daß wir die Eigenschaften der Teilchen indirekt, d. h. durch die Gesetze ihrer Bewegung erkennen. Und da die Bewegung durch das Feld beeinflusst wird, so haben wir beim heutigen Stand des Erkenntnisses bessere Informationen vom Feld als von den Teilchen. Deshalb werden wir zuerst die Wahl der Feldwirkung diskutieren, wir halten aber das Feld nicht für das erste Agens, sondern als die Folge und den Nachweis der objektiven Existenz der Teilchen.

Die nach diesen Grundlagen aufgebaute unitäre Theorie können wir mit einer der folgenden drei Methoden bearbeiten:

1. Wir rechnen nur mit den Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit. Die Teilchen werden als Singularitäten im Feld dargestellt. Den physikalischen Sinn der Integrationskonstanten, die die Eigenschaften der Teilchen ausdrücken, stellen wir durch den Vergleich mit den Theorien von Newton und Maxwell fest. Die Teilchenwirkung kommt in die Theorie nicht explizite hinein.

2. Die Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit ergänzen wir mit den weiteren aus dem Variationsprinzip abgeleiteten Gleichungen, die auf Grund der geeignet gewählten Teilchenwirkung den physikalischen Sinn und numerischen Wert der Integrationskonstanten bestimmen. Diese Methode wurde in der Arbeit I und IV erörtert.

3. Die Teilchenwirkung und die aus ihr abgeleitete Energie-Impuls-Tensordichte und elektrische Stromvektordichte des Teilchens setzen wir proportional der modifizierten Diracschen Delta-Funktion voraus. Diese Methode hat Infeld in die Relativitätstheorie eingeführt, da sie die Ableitung der Bewegungsgleichungen außerordentlich vereinfacht. Aus demselben Grund werden wir unten diese Methode auch auf die vorliegende unitäre Theorie ausdehnen. Wir bemerken dabei, daß sie in voller Übereinstimmung mit den Überlegungen der Arbeiten I und IV steht, denn es ist nur entscheidend, ob die Delta-Funktion, die sich im Gebiet befindet, von dem wir keine genauen Kenntnisse bisher haben, denselben Fluß bildet, welchen die Methode 2 angibt.

### Die Postulate der unitären Theorie

Infolge der Nichtsymmetrie des Fundamentaltensors und der Koeffizienten der affinen Konnexion gestattet das Postulat der allgemeinen Kovarianz eine bedeutend breitere Wahl des Hamiltonians, als es der Fall in der allgemeinen Relativitätstheorie war. Einstein hat diese Wahl mit drei Postulaten eingeengt<sup>19)</sup>, die wir hier der Vollständigkeit halber zusammenstellen \*).

<sup>40)</sup> Vergleiche auch das Verfahren von Fock ZETF 9, 375 (1939); A. Papapetrou, Proc. phys. Soc. (London) A 64, 57, 302 (1951) und Hu, Proc. Roy. Irish Acad. A 51, 87 (1951).

\*) Anmerkung bei der Korrektur: Das Problem der Postulate der unitären Theorie und die Frage über die Anzahl der in dieser Theorie zu erscheinenden Naturkonstanten werden in einer weiteren Arbeit des Verfassers nochmals erörtert.



1. Die kovarianten Komponenten des Fundamentaltensors  $g_{\mu\nu}$  sind mit den kontravarianten Komponenten  $g^{\mu\nu}$  nach der Gleichung

$$g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = g_{\alpha\mu} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (1)$$

verbunden, die ungeändert aus der allgemeinen Relativitätstheorie übernommen wurde. Aus Gl. (1) folgt

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \log \det g_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Die kontravariante Tensordichte  $g^{\mu\nu}$  ist dann mit der Beziehung

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} / \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \quad (3)$$

gegeben.

2. Das Variationsprinzip und die aus ihm abgeleiteten Feldgleichungen sind invariant mit Rücksicht auf die  $L$ -Transformation, die zum gegebenen Feld  $I_{\mu\nu}^*$  das neue Feld  $I_{\mu\nu}^e$  nach der Gleichung

$$I_{\mu\nu}^e = I_{\mu\nu}^* + 2 \delta_{\mu}^e L_{\nu} \quad (4)$$

zuordnet, wobei  $L_{\nu}$  ein beliebiges Vektorfeld ist<sup>41)</sup>. Wir wählen die Koeffizienten  $I_{\mu\nu}^e$  so, daß die Variation nach diesen zur Beziehung

$$g_{\mu\nu, \epsilon} - I_{\mu\epsilon}^{\alpha} g_{\alpha\nu} - I_{\epsilon\nu}^{\alpha} g_{\mu\alpha} = 0 \quad (5)$$

führt, die eine natürliche Verallgemeinerung der in der Relativitätstheorie geltenden Gleichung

$$h_{\mu\nu, \epsilon} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \epsilon \end{matrix} \right\} h_{\alpha\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu \epsilon \end{matrix} \right\} h_{\mu\alpha} = 0 \quad (6)$$

ist.

3. Alle Gleichungen sollen invariant mit Rücksicht auf die Transpositionen sein, d. h. die Gleichungen bleiben gültig, wenn wir  $g_{\mu\nu}$  mit  $\tilde{g}_{\mu\nu} (\equiv g_{\nu\mu})$  und  $I_{\mu\nu}^e$  mit  $\tilde{I}_{\mu\nu}^e (\equiv I_{\nu\mu}^e)$  vertauschen. Dies drückt die Tatsache aus, daß die Theorie indifferent gegenüber dem Vorzeichen der elektrischen Ladung ist.

Zu diesen drei Postulaten von Einstein hat der Verfasser in der Arbeit VI das vierte beigefügt:

4. Die Gleichungen der unitären Theorie sollen im starken Gravitations- und schwachen elektromagnetischen Feld in die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell übergehen.

Dieses Postulat stellt zugleich eine höchst wichtige Hilfe bei der physikalischen Interpretation der Theorie dar.

#### Die Wahl des Hamiltonians

In der Arbeit II hat der Verfasser die Gründe angegeben, die ihn veranlaßten, den von Einstein entworfenen Hamiltonian durch den folgenden zu ersetzen:

$$\mathfrak{H} = g^{\mu\nu} \left[ R_{\mu\nu} - 2 \Phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda g_{\mu\nu} - \left( \frac{1}{2} \lambda - d^{-2} \right) g_{\mu\nu} \right] \quad (7)$$

<sup>41)</sup> Das Vektorfeld  $L_{\nu}$  ist mit dem in den vorangehenden Arbeiten verwendeten Feld  $I_{\nu}$  nach der Gleichung  $L_{\nu} = \kappa I_{\nu}$  verbunden.

Es bedeutet hier  $R_{\mu\nu}$  den verjüngten Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor, der durch die Formel

$$R_{\mu\nu} = -\Gamma_{\mu\nu, \alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \quad (8)$$

bestimmt ist. Der Strich bezeichnet hier, wie üblich, die partielle Ableitung. Der Tensor  $\Phi_{\mu\nu}$  wird durch die Rotation des Vektors  $L_\nu$  gebildet<sup>42)</sup>

$$\Phi_{\mu\nu} = L_{\nu, \mu} - L_{\mu, \nu}. \quad (9)$$

Weiter bezeichnet  $g_{\mu\nu}$  den symmetrischen und  $g_{\mu\nu}$  den schiefssymmetrischen Teil des Fundamentaltensors:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}), \quad (10)$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}). \quad (11)$$

$\lambda$  ist die bekannte reelle kosmologische Konstante und  $d$  eine weitere reelle Naturkonstante<sup>43)</sup>.

Die vom Hamiltonian (7) abgeleitete Theorie enthält als Spezialfälle die Theorie von Einstein ( $\lambda = d^{-2} = 0$ ), die von Schrödinger ( $\lambda \neq 0, d^{-2} = 0$ ) und die von Bonnor ( $\lambda = 0, d^{-2} = -p^2 \neq 0$ ).

Die Möglichkeit einer anderen Wahl des Hamiltonians wurde von M<sup>me</sup> Tonnelat und von M<sup>me</sup> Winogradski<sup>44)</sup> diskutiert. Es folgt aus diesen Diskussionen, daß die Hamiltonians, soweit sie der Bedingung (5) genügen, verwickelter sind und zuletzt doch zu den Feldgleichungen von Einstein führen.

Vergleichen wir nun den Hamiltonian (7) mit dem in der leeren Raum-Zeit geltenden Hamiltonian der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell

$$\mathfrak{H} = g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda g_{\mu\nu} \right) + \mathfrak{E}^{\mu\nu} E_{\mu\nu}, \quad (12)$$

wo  $g_{\mu\nu}$  und  $R_{\mu\nu}$  symmetrische Tensoren sind und  $E_{\mu\nu}$  den schiefssymmetrischen Tensor des elektromagnetischen Feldes bezeichnet, so stellen wir fest, daß beide erwähnten Hamiltonians sehr ähnlich aufgebaut sind, falls wir  $g_{\mu\nu}$  mit  $E_{\mu\nu}$  identifizieren. Infolgedessen haben die aus dem Hamiltonian (7) abgeleiteten Feldgleichungen die von der Relativitätstheorie vorhergesagte Form. Für  $d = 0$  werden die Feldgleichungen beider Theorien identisch.

Wir bemerken noch, daß alle Glieder in Gl. (7) dem Produkt der Skalar-dichte  $\sqrt{-\det g_{\alpha\beta}}$  und der Spur je eines Tensors gleich sind, während in Gl. (12) die Invarianten mit der Skalar-dichte  $\sqrt{-\det g_{\alpha\beta}}$  gebildet werden, die im ersten Glied mit der Spur eines Tensors, im zweiten mit einer Konstante (denn  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$ ) und im dritten mit dem Quadrat der Länge eines Tensors multipliziert ist, was analytisch ganz sinnlos ist<sup>45)</sup>.

<sup>42)</sup> Das Tensorfeld  $\Phi_{\mu\nu}$  ist mit  $F_{\mu\nu}$  aus den vorangehenden Arbeiten nach der Gleichung  $\Phi_{\mu\nu} = \kappa F_{\mu\nu}$  verbunden.

<sup>43)</sup> Die Konstante  $d$  ist mit der in vorangehenden Arbeiten verwendeten Konstante  $\kappa$  nach der Gleichung  $d^{-2} = -\kappa > 0$  verbunden.

<sup>44)</sup> Siehe Fußnote 23, S. 20, 28ff., 129 und S. 31, Note (2), S. 33.

<sup>45)</sup> Siehe Fußnote 17, S. 284.



Bei der Entwicklung der unitären Theorie werden wir das kosmologische Glied berücksichtigen, um die größte Allgemeinheit zu erreichen. Der Verfasser gibt aber keine physikalischen Gründe weder zugunsten noch gegen dieses Glied an und überläßt diese Frage einer weiteren Untersuchung.

### Die Feldgleichungen

#### Die Variation der Feldwirkung

Wir nehmen an, daß die Feldwirkung  $W_1$  durch den Ausdruck

$$W_1 = \frac{1}{16\pi} \int \mathfrak{H} \, d\tau \quad (13)$$

gegeben ist, in den wir den Hamiltonian (7) einsetzen. Da wir in dieser Arbeit mit der modifizierten Delta-Funktion proportionalen Teilchenwirkung rechnen werden, so wird die Integration in Gl. (13), im Gegensatz zur Arbeit I, über die gesamte Raum-Zeit des betrachteten Gebietes durchgeführt. Um die Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie zu erreichen, haben wir den Koeffizient  $1/16\pi$  statt des früheren  $1/8\pi$  vor das Integral gestellt.

Wählen wir für unabhängig Veränderliche  $\Gamma_{\mu\nu}^e$ ,  $g^{\mu\nu}$  und  $L_\mu$ , so finden wir nach der durchgeführten Variation den Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta W_1 = \frac{1}{16\pi} \int \{ \mathfrak{T}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + [ (g^{\mu\nu};_{;\epsilon} - 2 \Gamma_{\epsilon\sigma}^{\mu\nu} g^{\sigma\epsilon} + 2 \Gamma_{\epsilon\lambda}^{\nu\sigma} g^{\lambda\sigma}) - \\ - \delta_{\epsilon}^{\nu} (g^{\mu\beta};_{;\beta} - 2 \Gamma_{\beta\sigma}^{\mu\sigma} g^{\sigma\beta}) ] \delta \Gamma_{\mu\nu}^e - 4 g^{\mu\nu}_{;\nu} \delta L_\mu \} d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

wobei wir bei der partiellen Integration den in der Arbeit I berücksichtigten Anteil über die Begrenzung aller Teilchen jetzt vernachlässigt haben, da wir mit der Delta-Funktion rechnen. Der Strichpunkt bezeichnet die kovariante Ableitung nach der nichtsymmetrischen affinen Konnexion  $\Gamma_{\mu\nu}^e$ . Die Tensor-dichte  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$  ist durch die Definitionsgleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} = \\ &= \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - 2 \Phi_{\mu\nu} + \Phi g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \right) \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (15)$$

gegeben, wo

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (16)$$

$$\Phi = \Phi_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (17)$$

$$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} - d^{-2} \left( g^{\alpha\beta} g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \right). \quad (18)$$

#### Die Variation der Teilchenwirkung

Wir nehmen an, daß die gesamte Teilchenwirkung  $W_2$  durch die Summe der Wirkungen der einzelnen Teilchen gegeben ist:

$$W_2 = \sum_k W_2^{(k)}. \quad (19)$$

Die Variation wird nach dem Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  und nach dem Vektor  $L_\mu$  durchgeführt:

$$\delta W_2 = \sum_k \int \left( \frac{1}{2} \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\nu}^{(k)} \delta g^{\mu\nu} + \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\mu} \delta L_\mu \right) d\tau. \quad (20)$$

Hier integrieren wir wieder über die gesamte Raum-Zeit des betrachteten Gebietes. Von der Tensordichte  $\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}^{(k)}$  und von der Vektordichte  $\hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu}$  setzen wir nur das voraus, daß sie proportional der modifizierten Delta-Funktion<sup>40)</sup> sind, ihre explizite funktionale Abhängigkeit ist aber durch die Feldgleichungen bestimmt.

Nach dem Postulat 4 soll der Ausdruck (20) in der Maxwellschen Näherung, womit wir den Fall eines starken Gravitations- und schwachen elektromagnetischen Feldes benannt haben, in die aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannte Form übergehen. Falls alle Teilchen einfache Pole sind, gilt

$$\delta W_2 = \sum_k \int \left( \frac{1}{2} \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}^{(k)} \delta g^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu} \delta A_\mu \right) d\tau. \quad (21)$$

Wie Tulczyjew<sup>47)</sup> nachgewiesen hat, ist die Tensordichte in der Relativitätstheorie durch die Beziehung

$$\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}^{(k)} = \hat{\mathcal{T}}^{(k)\gamma\delta} h_{\gamma\mu} h_{\delta\nu} = m^{(k)} \xi^{(k)\gamma} \xi^{(k)\delta} h_{\gamma\mu} h_{\delta\nu} \hat{\delta}^{(k)} \quad (22)$$

gegeben, wobei  $m^{(k)}$  die Masse des  $k$ -ten Teilchens,  $\hat{\delta}^{(k)}$  seine modifizierte Delta-Funktion und  $\xi^{(k)\alpha}$  seine Koordinaten sind<sup>48)</sup>. Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach  $x_4$ :

$$\dot{\xi}^{(k)\alpha} = \frac{d\xi^{(k)\alpha}}{dx_4}.$$

Im zweiten Glied auf der rechten Seite der Gl. (21) bezeichnen  $A_\mu$  die Komponenten des vierdimensionalen Potentials des elektromagnetischen Feldes und  $\hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu}$  die elektrische Stromdichte, die das  $k$ -te Teilchen hervorruft. Dafür gilt der Ausdruck

$$\hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu} = q_0^{(k)} \dot{\xi}^{(k)\mu} \hat{\delta}^{(k)}, \quad (23)$$

in dem  $q_0^{(k)}$  die (invariante) elektrische Ladung des  $k$ -ten Teilchens ist.

Vergleichen wir Gl. (21) mit (20), so stellen wir nach dem Postulat 4 fest, daß das Vektorfeld  $L_\mu$  der unitären Theorie proportional dem vierdimensionalen Potential des elektromagnetischen Feldes  $A_\mu$  sein muß<sup>49)</sup>

$$L_\mu = a_0 A_\mu. \quad (24)$$

Dann muß die Vektordichte  $\hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu}$  aber proportional der elektrischen Stromdichte  $\hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu}$  sein:

$$\hat{\mathcal{S}}^{(k)\mu} = \frac{1}{a_0} \mathcal{S}^{(k)\mu}. \quad (25)$$

<sup>46)</sup> L. Infeld u. J. Plebański, Bull. Acad. Polon. Sci. 4, 687 (1956); 5, 51 (1957).

<sup>47)</sup> W. Tulczyjew, Bull. Acad. Polon. Sci. 5, 279 (1957).

<sup>48)</sup> Da wir die Koordinaten in der Raum-Zeit mit  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) bezeichnen, sollten wir auch die Koordinaten des Teilchens mit  $\xi_\alpha^{(k)}$  bezeichnen. Um hervorzuheben, daß  $\dot{\xi}^{(k)\alpha}$  kontravariante Komponenten eines Vektors sind, schreiben wir in Übereinstimmung mit den Arbeiten von Infeld  $\dot{\xi}^{(k)\alpha}$  — siehe auch Fußnote 21, S. 7.

<sup>49)</sup> Die Konstante  $a_0$  ist mit der in den vorangehenden Arbeiten verwendeten Konstante  $a$  nach der Gleichung  $a_0 = \kappa a$  verbunden.

Die Voraussetzung, daß die Teilchenwirkung in der unitären Theorie auch vom Feld  $L_\mu$  abhängt, gibt uns in Verbindung mit dem Postulat 4 eine wertvolle Richtlinie zur Identifizierung der geometrischen Felder der unitären Theorie. Die Gleichungen (24) und (25) sind das erste klare Zeugnis gegen die physikalische Interpretation der Theorie, wie sie Hlavatý<sup>28)</sup> und Bonnor<sup>27)</sup> durchgeführt haben.

### Die Ableitung der Feldgleichungen

Das Variationsprinzip der stationären Wirkung behauptet, daß

$$\delta W_1 + \delta W_2 = 0.$$

Nach Einsetzen der Gln. (14) und (21) haben wir

$$\frac{1}{16\pi} \int \left\{ \left[ (g^{\mu\nu};_\epsilon - 2 \Gamma_{\epsilon\sigma}^\sigma g^{\mu\nu} + 2 \Gamma_{\epsilon\alpha}^\nu g^{\mu\alpha}) - \delta_\epsilon^\nu (g^{\mu\beta};_\beta - 2 \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma g^{\mu\beta}) \right] \delta I_{\mu\nu}^\epsilon + \right. \\ \left. + (\mathfrak{T}_{\mu\nu} + 8\pi \sum_k \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\nu}^{(k)}) \delta g^{\mu\nu} + (-4 g^{\mu\nu};_{,\nu} + 16\pi \sum_k \hat{\mathfrak{T}}^{(k)\mu}) \delta L_\mu \right\} d\tau = 0.$$

Da wir bei der Variation die  $\Gamma_{\mu\nu}^\epsilon$ ,  $g^{\mu\nu}$  und  $L_\mu$  für unabhängige Veränderliche halten, kann die vorangehende Gleichung erfüllt werden, wenn es gilt

$$(g^{\mu\nu};_\epsilon - 2 \Gamma_{\epsilon\sigma}^\sigma g^{\mu\nu} + 2 \Gamma_{\epsilon\alpha}^\nu g^{\mu\alpha}) - \delta_\epsilon^\nu (g^{\mu\beta};_\beta - 2 \Gamma_{\beta\sigma}^\sigma g^{\mu\beta}) = 0, \quad (26)$$

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (27)$$

$$g^{\mu\nu};_{,\nu} = 4\pi \sum_k \hat{\mathfrak{T}}^{(k)\mu}. \quad (28)$$

Die Folge der Gln. (26) und (28) ist

$$\Gamma_{\epsilon\sigma}^\sigma = 0. \quad (29)$$

Führen wir die kovariante Ableitung in Gl. (26) durch und gehen von der kontravarianten Tensordichte zum kovarianten Tensor unter Berücksichtigung der Gl. (29) über, so kommen wir zur Beziehung (5). Sie stellt uns das System von 64 algebraischen Gleichungen für die Unbekannten  $\Gamma_{\mu\nu}^\epsilon$ . Hlavatý und Sáenz<sup>50)</sup> haben nachgewiesen, daß es eine eindeutige Lösung hat, wenn

$$\det g_{\mu\nu} \neq 0, \det g_{\mu\nu} \neq 0, \quad \text{falls } \det g_{\mu\nu} \neq 0, \quad (30a)$$

oder

$$\det g_{\mu\nu} \neq 0, (\det g_{\mu\nu} - 2 \det g_{\mu\nu}) \det g_{\mu\nu} \neq 0 \quad \text{falls } \det g_{\mu\nu} = 0. \quad (30b)$$

### Die Umformung der Gleichung (27)

Auf die linke Seite der Gl. (27) setzen wir aus der Definitionsgleichung (15) ein und gehen zugleich von der Tensordichte zum Tensorfeld über

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - 2 \Phi_{\mu\nu} + \Phi g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}. \quad (27a)$$

Durch Verjüngung erhalten wir

$$-R + 2\Phi + G = -8\pi \sum_k \hat{T}^{(k)},$$

<sup>50)</sup> V. Hlavatý u. A. W. Sáenz, J. Rat. Mech. Anal. 2, 523 (1953).

wobei

$$G = G_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (31)$$

$$\hat{T}^{(k)} = \hat{T}_{\alpha\beta}^{(k)} g^{\alpha\beta}. \quad (32)$$

Nach Einsetzen in Gl. (27a) haben wir

$$R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} - 2\Phi_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \left( \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)} - \frac{1}{2} \hat{T}^{(k)} g_{\mu\nu} \right) \quad (27b)$$

mit

$$H_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu}. \quad (33)$$

Gl. (27b) kann in ihren symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil aufgeteilt werden

$$R_{\underline{\mu}\nu} + H_{\underline{\mu}\nu} = -8\pi \sum_k \left( \hat{T}_{\underline{\mu}\nu}^{(k)} - \frac{1}{2} \hat{T}^{(k)} g_{\underline{\mu}\nu} \right), \quad (34)$$

$$R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} - 2\Phi_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \left( \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)} - \frac{1}{2} \hat{T}^{(k)} g_{\mu\nu} \right). \quad (35)$$

Aus Gl. (35) folgt, daß in der leeren Raum-Zeit gilt

$$R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = 2\Phi_{\mu\nu}. \quad (36)$$

In Analogie mit der Maxwellschen Theorie dehnen wir die Gültigkeit dieser Gleichung auf die gesamte Raum-Zeit aus. Infolgedessen müssen die schiefsymmetrischen Komponenten  $\hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}$  die Beziehung

$$\hat{T}_{\mu\nu}^{(k)} - \frac{1}{2} \hat{T}^{(k)} g_{\mu\nu} = 0 \quad (37)$$

erfüllen. Die Gl. (36) halten wir für die Definitionsgleichung des Tensorfeldes  $\Phi_{\mu\nu}$ .

Durch Verjüngung in Gl. (36) bestimmen wir den mit Gl. (17) definierten Skalar  $\Phi$

$$R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\Phi.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in Gl. (27a) ein. Nach Umformung haben wir

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 2\Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}. \quad (27c)$$

Nach Verjüngung von Gl. (33) ergibt sich

$$H = -G, \quad (38)$$

wobei

$$H = H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (39)$$

Statt Gl. (33) können wir daher auch schreiben

$$G_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H g_{\mu\nu}. \quad (40)$$

Gl. (40) setzen wir in Gl. (27c) ein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 2\Phi_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}. \quad (27d)$$

Die Subtraktion der Gl. (27d) von (27b) gibt uns

$$(31) \quad \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 8\pi \sum_k \frac{1}{2} \hat{T}^{(k)}. \quad (41)$$

Bei der letzten Umformung spalten wir Gl. (27d) in den symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil:

$$(27b) \quad \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) + \left( H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (42)$$

$$(33) \quad \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) + \left( H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) - 2\Phi_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}. \quad (43)$$

Substituieren wir die Beziehung (41) in Gl. (43), erhalten wir wieder Gl. (35). Da das Feld  $\Phi_{\mu\nu}$  stets mit der Definitionsgleichung (36) bestimmt ist, verschwindet die linke Seite von (35) identisch. Ebenso verschwindet identisch auch die rechte Seite von (35), da der Tensor  $\hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}$  durch Gl. (37) gegeben ist.

Nach dieser Umformung sind 16 Gleichungen (27) durch 10 Gleichungen (43) und durch 6 Gleichungen (36) ersetzt, die weder den Skalar  $\Phi$  noch  $\hat{T}^{(k)}$  enthalten. In der leeren Raum-Zeit haben die Gleichungen (42) die besonders einfache Form

$$R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = 0, \quad (44)$$

wie sie in der Arbeit II abgeleitet wurden.

Der schiefsymmetrische Tensor  $\Phi_{\mu\nu}$  wird zugleich durch die Rotation des Vektorfeldes nach Gl. (9) gebildet. Durch zyklische Divergenz von  $\Phi_{\mu\nu}$  entsteht der vollständig schiefsymmetrische Tensor dritter Stufe  $\Phi_{\mu\nu\epsilon}$ :

$$\Phi_{\mu\nu\epsilon} = \Phi_{[\mu\nu, \epsilon]} \equiv \Phi_{\mu\nu, \epsilon} + \Phi_{\epsilon\mu, \nu} + \Phi_{\epsilon\nu, \mu}. \quad (45)$$

Das Verschwinden von  $\Phi_{\mu\nu\epsilon}$  ist die Integrabilitätsbedingung für das Gleichungssystem (9). Daraus folgen 4 Feldgleichungen

$$R_{[\mu\nu, \epsilon]} + H_{[\mu\nu, \epsilon]} = 0, \quad (46)$$

in denen  $R_{[\mu\nu, \epsilon]}$  und  $H_{[\mu\nu, \epsilon]}$  die zyklischen Divergenzen von  $R_{\mu\nu}$  und  $H_{\mu\nu}$  bezeichnen, die ebenso wie die  $\Phi_{[\mu\nu, \epsilon]}$  in Gl. (45) definiert sind.

In den vorangehenden Gleichungen kommt das Tensorfeld  $H_{\mu\nu}$  vor. Es ist mit dem Feld  $G_{\mu\nu}$  nach Gl. (33) verbunden. Auf Grund der Gleichungen (33), (31) und (18) berechnen wir die symmetrischen und schiefsymmetrischen Komponenten  $H_{\mu\nu}$ ,  $H_{\mu\nu}$ :

$$H_{\mu\nu} = -\lambda g_{\mu\nu} - 2d^{-2} \left( g^{\alpha\beta} g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right), \quad (47)$$

$$(40) \quad H_{\mu\nu} = -\lambda g_{\mu\nu} - d^{-2} \left[ g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu}) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \right]. \quad (48)$$

Aus Gl. (47) bestimmen wir den Skalar  $H_{\epsilon\sigma} g^{\epsilon\sigma}$ :

$$(27d) \quad H_{\epsilon\sigma} g^{\epsilon\sigma} = -\lambda \zeta_{\epsilon\sigma}^{\epsilon\sigma} - 2d^{-2} \left( g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} \zeta_{\epsilon\beta}^{\epsilon\sigma} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \zeta_{\epsilon\sigma}^{\epsilon\sigma} \right), \quad (49)$$

indem wir in Gl. (42) die Beziehung

$$H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = -\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) g_{\mu\nu} - 2 d^{-2} \left[ g^{\alpha\beta} \left( g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \zeta_{\beta}^{\sigma} g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) g_{\mu\nu} \right] \quad (50)$$

einsetzen. In die vorangehenden zwei Gleichungen haben wir die Substitution

$$\zeta_{\sigma}^{\sigma} = g_{\eta\sigma} g^{\eta\sigma} \quad (51)$$

eingeführt.

### Die Identitäten

In der leeren Raum-Zeit gibt es unter den Feldgleichungen die folgenden  $1 + 1 + 4$ -Identitäten.

Die erste 1-Identität gehört zur Gl. (28) und lautet

$$g^{\mu\nu}_{, \nu} = 0. \quad (52)$$

Sie ist die Folge der Antisymmetrie von  $g^{\mu\nu}$ .

Um die zweite Identität in einer einfachen Form zu schreiben, bilden wir aus dem kovarianten, vollständig schiefsymmetrischen Tensor

$$\frac{1}{2} (R_{[\mu\nu, \epsilon]} + H_{[\mu\nu, \epsilon]})$$

die kontravariante Tensordichte

$$\mathfrak{M}^{\sigma} = \frac{1}{12} (R_{[\mu\nu, \epsilon]} + H_{[\mu\nu, \epsilon]}) \epsilon^{\mu\nu\epsilon\sigma}, \quad (53)$$

in der  $\epsilon^{\mu\nu\epsilon\sigma}$  eine kontravariante, vollständig schiefsymmetrische Tensordichte mit den Komponenten  $\pm 1, 0$  ist. Die Divergenz von  $\mathfrak{M}^{\sigma}$  verschwindet dann identisch

$$\mathfrak{M}^{\sigma}_{, \sigma} = 0, \quad (54)$$

was die zweite 1-Identität ist.

Die letzten 4 Identitäten folgen mit Hilfe der Methode von Weyl direkt aus der Variation von  $W_1$ . In der von Schrödinger<sup>51)</sup> abgeleiteten Form lauten sie

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_{\epsilon\mu} g^{\nu\mu})_{, \nu} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}_{, \epsilon} = 0. \quad (55)$$

In einer anderen Bezeichnungsweise wurden sie auch von Bose<sup>52)</sup> und von Lichnerowicz<sup>53)</sup> gefunden.

### Die Kompatibilität und Vollständigkeit der Feldgleichungen

Die Feldgleichungen der vorliegenden Theorie sind die Gln. (5), (42), (36) und (28). Ihre Kompatibilität wird dadurch gewährleistet, daß sie von einem kovarianten Variationsprinzip abgeleitet sind.

<sup>51)</sup> E. Schrödinger, Proc. Roy. Irish Acad. A **52**, 1 (1948).

<sup>52)</sup> S. N. Bose, C. R. Acad. Sci. (Paris) **236**, 1333 (1953).

<sup>53)</sup> A. Lichnerowicz, C. R. Acad. Sci. (Paris) **236**, 1383 (1953). Siehe auch Fußnote 14, S. 270 ff.

Wir nehmen nun an, daß eine der Bedingungen (30a, b) für die eindeutige Lösung der Gl. (5) erfüllt ist. Wenn wir dann dieses System von 64 algebraischen Gleichungen gelöst und die gefundenen Werte von  $\Gamma_{\mu\nu}^*$  als Funktionen des Fundamentaltensors  $g_{\mu\nu}$  in den verjüngten Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor  $R_{\mu\nu}$  eingesetzt haben, so stellen uns 10 Gleichungen (42), 4 Gleichungen (36) und 4 Gleichungen (28) insgesamt 18 Feldgleichungen für 16 Komponenten des Fundamentaltensors  $g_{\mu\nu}$  dar. Da unter ihnen 1 Identität (52), 1 Identität (54) und 4 Identitäten (55), also insgesamt 6 Identitäten existieren, so bleiben nur 12 Feldgleichungen unabhängig, d. h. um 4 Gleichungen weniger, als die Anzahl der unbekannten Funktionen ist, was genau dem Postulat der allgemeinen Kovarianz der Feldgleichungen entspricht.

### Die Feldgleichungen in der Maxwellschen Näherung

In der unitären Theorie gibt es kein anderes Feld als das unitäre. Es ist sinnlos, hier von einem Gravitations- und einem elektromagnetischen Anteil zu sprechen, da beide durcheinander so durchdringen, daß es unmöglich ist, sie klar zu separieren. Darum ist die physikalische Interpretation der unitären Theorie so schwierig.

Erst dann, wenn wir in der vorliegenden Theorie alle quadratischen und höheren Glieder in  $g_{\mu\nu}$  (mit der einzigen Ausnahme der quadratischen Glieder in  $g_{\mu\nu}$ , die mit der — sicher sehr großen — Naturkonstante  $d^{-2}$  multipliziert sind) vernachlässigen, nehmen die Feldgleichungen die Form an, die uns eine klare Richtlinie zur physikalischen Interpretation der Theorie gibt. Diese Näherung haben wir als die Maxwellsche benannt, da die Feldgleichungen für  $g_{\mu\nu}$  die lineare Form des Maxwellschen Feldes haben.

Zuerst zerlegen wir den Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  in den symmetrischen und schief-symmetrischen Teil

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} = k_{\mu\nu}. \quad (56)$$

Es wurde in der Arbeit VI gezeigt, daß in der Maxwellschen Näherung gilt

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = k^{\mu\nu} = k_{\alpha\beta} h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu}, \quad g^{\mu\nu} = k^{\mu\nu} \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}, \quad (57)$$

wobei

$$h^{\mu\nu} = h^{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial h_{\mu\nu}} \log \det h_{\alpha\beta}. \quad (58)$$

Durch denselben Rechnungsgang wie in der Arbeit VI stellen wir fest, daß die Feldgleichungen (42), (36) und (28) in der Maxwellschen Näherung in die folgende Form übergehen:

$$\left( P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} P_{\varrho\sigma} h^{\varrho\sigma} h_{\mu\nu} + \lambda h_{\mu\nu} \right) + \left( H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\varrho\sigma} h^{\varrho\sigma} h_{\mu\nu} - \lambda h_{\mu\nu} \right) = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (59)$$

$$\Phi_{[\mu\nu, \varrho]} = 0, \quad (60)$$

$$(k^{\mu\nu} \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}})_{,\nu} = 4\pi \sum_k \hat{S}^{(k)\mu}, \quad (61)$$



wobei hier

$$\left( H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\sigma} h^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu} - \lambda h_{\mu\nu} \right) = 2d^{-2} \left( -k^{\alpha\beta} k_{\mu\beta} h_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} k^{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right), \quad (62)$$

$$\Phi_{\mu\nu} = d^{-2} k_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda k_{\mu\nu} + \frac{1}{4} h^{\alpha\beta} k_{[\alpha\nu, \mu]:\beta} + \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} k_{\mu\nu:\alpha:\beta}, \quad (63)$$

denn in dieser Näherung gilt

$$\zeta_{\sigma}^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\sigma}. \quad (64)$$

Wir bezeichnen dabei mit  $P_{\mu\nu}$  den symmetrischen verjüngten Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor, der nach Gl. (8) statt mit  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  jetzt mit den Christoffelschen Symbolen  $\{\epsilon_{\mu\nu}\}$  gebildet wird. Der Doppelpunkt bedeutet die Riemannsche kovariante Ableitung (nach  $\{\epsilon_{\mu\nu}\}$ ). In der leeren Raum-Zeit nehmen die Feldgleichungen (59), (60) und (61) die in der Arbeit VI abgeleitete Form an.

Die entsprechenden Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell lauten in unserer Bezeichnungsweise

$$\left( P_{\mu\nu} - \frac{1}{2} P_{\alpha\sigma} h^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu} + \lambda h_{\mu\nu} \right) + 8\pi V_{\mu\nu} = -8\pi \sum_k \hat{T}_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (65)$$

$$E_{[\mu\nu, \epsilon]} = 0, \quad (66)$$

$$(E^{\mu\nu} \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}})_{, \nu} = 4\pi \sum_k \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\mu}, \quad (67)$$

wobei der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes durch die bekannte Beziehung

$$V_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -E^{\alpha\beta} E_{\mu\beta} h_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} E^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} \right) \quad (68)$$

gegeben ist.

Wir sehen nun, daß Gl. (59) in der unitären Theorie von Einstein-Schrödinger, in der

$$\left( H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} H_{\alpha\sigma} h^{\alpha\sigma} h_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \right) = 0$$

ist, das reine Gravitationsfeld (ohne bzw. mit kosmologischem Glied) beschreibt.

In der vorliegenden Theorie werden die Gleichungen (59) und (61) identisch mit (65) und (67), wenn wir setzen

$$E^{\mu\nu} = k^{\mu\nu} d^{-1}, \quad \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\mu} = \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\mu} d^{-1}, \quad (69)$$

so daß die Konstante  $a_0$  in Gln. (24,) (25) den Wert

$$a_0 = d^{-1} \quad (70)$$

haben muß. Wir halten daher Gln. (61) und (60) für den ersten bzw. zweiten Quadrupel der Maxwell'schen Gleichungen. Während der erste genau dieselbe Form hat, wie in der Maxwell'schen Theorie, haben wir statt des zweiten in der Maxwell'schen Näherung

$$\Phi_{\mu\nu} d = E_{\mu\nu} + d^2 \left( \frac{1}{4} h^{\alpha\beta} E_{[\alpha\nu, \mu]:\beta} + \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} E_{\mu\nu:\alpha:\beta} - \frac{1}{2} \lambda E_{\mu\nu} \right), \quad (71)$$

d. h. der Tensor  $E_{\mu\nu}$  ist nicht genau gleich der Rotation eines Vektorfeldes, sondern es existieren hier noch gewisse Zusatzglieder, von denen wir voraussetzen müssen, daß sie infolge der Naturkonstante  $d^2$  stets einen kleinen Wert haben. Es ist aber möglich, ein solches lokales geodätisches System von Koordinaten zu wählen, in dem alle 16 Komponenten

$$h^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \sigma \right\}_{\mu\alpha}$$

verschwinden<sup>54)</sup>, so daß

$$h^{\alpha\beta} k_{\mu\nu;\alpha;\beta} = h^{\alpha\beta} k_{\mu\nu,\alpha,\beta}.$$

Die Feldgleichung (60) wird dann durch

$$k_{[\mu\nu,\sigma]} = 0 \quad (72)$$

ersetzt, denn das Tensorfeld  $k_{\mu\nu}$ , das die Feldgleichungen (61) und (72) erfüllt, genügt auch der Gleichung

$$h^{\alpha\beta} k_{\mu\nu,\alpha,\beta} = 0. \quad (73)$$

Es gibt nun in diesem Koordinatensystem keinen Unterschied mehr zwischen der Maxwellschen Näherung und der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell.

#### Die physikalische Interpretation der vorliegenden Theorie

Die physikalische Interpretation der vorliegenden Theorie ist nun klar geworden:

Wir identifizieren die symmetrischen Komponenten des Fundamentaltensors mit den Gravitationspotentialen. Sie bestimmen zugleich die Metrik des Raum-Zeit-Kontinuums. Infolgedessen führen wir die kontravarianten Komponenten aller Tensoren und Tensordichten auf die kovarianten und die kovarianten auf die kontravarianten mit Hilfe der Tensoren  $h_{\mu\nu}$  bzw.  $h^{\mu\nu}$  über, die durch die Gln. (56) und (58) definiert sind. Einzige Ausnahme bildet der Fundamentaltensor selbst, dessen kontravariante Komponenten mit Gl. (2) bzw. (3) gegeben sind.

Die schiefssymmetrischen Komponenten des Fundamentaltensors identifizieren wir nach Gl. (69) mit dem elektromagnetischen Feld, und zwar  $g_{\mu\nu}$  mit den Intensitätsgrößen ( $B$ ,  $E$ ) und  $g^{\mu\nu}$  mit den Quantitätsgrößen ( $H$ ,  $D$ ).

Die paradoxe Tatsache, daß die symmetrischen Komponenten des Fundamentaltensors den Potentialen und die schiefssymmetrischen den Intensitäten proportional sind, hat schon Bonnor<sup>27)</sup> geklärt, indem er gezeigt hat, daß die  $g_{\mu\nu}$  und die ersten Ableitungen von  $g_{\mu\nu}$  in den Bewegungsgleichungen als verallgemeinerte Kraftkomponenten erscheinen.

Es entsteht nun die Frage, wie  $g_{mn}$  und  $g_{m4}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) zu interpretieren sind. Der Verfasser hat stets  $g_{mn}$  mit dem magnetischen und  $g_{m4}$  mit dem elektrischen Feld identifiziert. Dagegen haben Einstein<sup>55)</sup>, Infeld<sup>54)</sup>, Callaway<sup>28)</sup> und Bonnor<sup>27)</sup> die umgekehrte Interpretation angenommen. Für unsere Interpretation spricht nicht nur der Vergleich mit der Relativitätstheorie von

<sup>54)</sup> Siehe Fußnote 17, S. 262.

<sup>55)</sup> Siehe Fußnote 16, S. 147.

Einstein-Maxwell, sondern auch die Ergebnisse der strengen statischen kugelsymmetrischen Lösung der Feldgleichungen aus der Arbeit I, nach der die Bonnorsche Interpretation die höchst unwahrscheinliche Existenz eines isolierten magnetischen Poles zur Folge hätte. Wir nehmen Rücksicht auch auf eine Bemerkung von Pauli<sup>56)</sup>, nach der die Intensität des elektrischen Feldes im lokalen pseudoeuklidischen Koordinatensystem ein polarer Vektor und die Intensität des magnetischen Feldes ein axialer Vektor ist. Wir halten deshalb unsere Interpretation für die naturgemäße Darstellung des elektromagnetischen Feldes, während der Tensor  $g_{\mu\nu}$  in der anderen Interpretation eine künstliche Bildung ist.

Die physikalische Interpretation des Verfassers hat weiter zur Folge, daß die Vektordichte  $g^{\mu\nu}$  für die elektrische Stromvektordichte zu halten ist. Da aber die  $g^{\mu\nu}$  in der leeren Raum-Zeit verschwinden, kann die vorliegende Theorie nicht für eine reine Feldtheorie im Sinne der Überlegungen von Einstein<sup>57)</sup> betrachtet werden, denn die Feldgleichungen (42) und (28), die die Entstehung des unitären Feldes beschreiben, enthalten auf der rechten Seite als Quellen desselben die Ruhmasse und die elektrische Ladung der Teilchen. Die Feldgleichungen (46) bestimmen dagegen die inneren Gesetzmäßigkeiten des Feldes.

Den Vektor  $L_\mu$  identifizieren wir mit dem vierdimensionalen Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes  $A_\mu$  (s. Gl. (25)). Da in Gl. (63) noch kleine Zusatzglieder erscheinen, wird das Feld  $g_{\mu\nu}$  in der Maxwellschen Näherung nur in einem sehr speziellen lokalen geodätischen Koordinatensystem genau durch die Rotation eines Vektorfeldes gebildet.

Die neue Naturkonstante  $d$  der vorliegenden Theorie stellt eine Kopplungskonstante zwischen dem Gravitations- und dem elektromagnetischen Anteil des unitären Feldes dar. Da diese Kopplung sicher sehr lose ist, so ist der Wert von  $d$  klein. Mit sinkendem Wert von  $d$  sinkt auch die Bedeutung der Zusatzglieder in Gln. (63) und (71), bis für  $d \rightarrow 0$  das Tensorfeld  $g_{\mu\nu}$  so klein wird, daß die vorliegende Theorie in die Maxwellsche Näherung und diese weiter in die Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell übergeht.

Wenn wir die von Bonnor vorgeschlagene Identifizierung von  $g_{\mu\nu}$  verlassen und die des Verfassers übernehmen, unterscheidet sich die Theorie von Bonnor von der des Verfassers nur durch das kosmologische Glied.

### Die Erhaltungssätze

Die mathematischen Identitäten (52), (54) und (55), die die Anzahl der unabhängigen Feldgleichungen von 18 auf 12 erniedrigen, stellen in der unitären Theorie — ebenso wie in der allgemeinen Relativitätstheorie — vom physikalischen Standpunkt aus die Erhaltungssätze dar.

#### Der Erhaltungssatz für die elektrische Stromdichte

Nach den Gln. (25) und (69) haben wir die Vektordichte  $\hat{S}^{(k)\mu}$  mit der elektrischen Stromdichte des  $k$ -ten Teilchens identifiziert. Nach Gl. (28) stellt dann  $g^{\mu\nu}$  die gesamte elektrische Stromdichte, die in der leeren Raum-Zeit

<sup>56)</sup> W. Pauli, Relativitätstheorie, Enzyklopädie der math. Wiss. V, 2. Berlin 1921, S. 631.

<sup>57)</sup> Siehe Fußnote 16, S. 165.

verschwindet. Die Identität (53) spricht dann den Erhaltungssatz für die elektrische Stromdichte aus.

Die Folge der Identität (52) ist, daß auch die Divergenz der rechten Seite von (28) verschwinden muß. Da dieser Ausdruck die modifizierte Delta-Funktion enthält, muß die Divergenz der elektrischen Stromdichte für jedes Teilchen verschwinden:

$$\hat{\mathfrak{J}}^{(k)\mu}_{,\mu} \equiv 0. \quad (74)$$

Die Feldgleichungen haben damit diejenigen Bedingungen ergeben, denen die Vektordichte  $\hat{\mathfrak{J}}^{(k)\mu}$  genügen muß. Vom physikalischen Standpunkt aus bedeutet die Identität (74) den Erhaltungssatz für die elektrische Ladung.

Beide Identitäten gelten in ungeänderter Form auch in der Maxwellschen Näherung.

#### Der Erhaltungssatz für die magnetische Stromdichte

In Anlehnung an die Maxwellsche Theorie benennen wir die Vektordichte  $\mathfrak{M}^\sigma$  die (fiktive) magnetische Stromdichte, die stets gleich Null ist, wodurch der Ansatz (37) gerechtfertigt wird. Die Identität (54) stellt uns dann den Erhaltungssatz für die magnetische Stromdichte dar.

Statt Gl. (53) können wir nach Gl. (36) auch schreiben

$$\mathfrak{M}^\sigma = \frac{1}{6} \Phi_{[\mu\nu, \epsilon]} \epsilon^{\mu\nu\epsilon\sigma}. \quad (75)$$

Der Ausdruck für  $\mathfrak{M}^\sigma$  unterscheidet sich in der Maxwellschen Näherung von dem, der in der Relativitätstheorie gilt, durch kleine Zusatzglieder, die nur in einem gewissen lokalen geodätischen Koordinatensystem oder für  $d = 0$  verschwinden.

#### Der Erhaltungssatz für Energie und Impuls

Durch denselben Rechnungsgang wie in der Arbeit II nehmen die vier Identitäten (55) folgende Form ein:

$$\begin{aligned} & [(\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu})_{,\nu} - \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\sigma\nu} I_{\sigma\epsilon}^\mu] + [(\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu})_{,\nu} - \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\sigma\nu} I_{\sigma\epsilon}^\mu] \\ & - (\mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\sigma\nu} + \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\sigma\nu}) I_{\sigma\epsilon}^\mu \equiv 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Bezeichnen wir die kovariante Ableitung nach der symmetrischen affinen Konnexion  $\Gamma_{\mu\nu}^\epsilon$  mit dem Dreipunkt, so lautet die vorangehende Identität

$$[\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu}]_{;\nu} + [\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu}]_{;\nu} - (\mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\sigma\nu} + \mathfrak{T}_{\mu\nu} g^{\sigma\nu}) I_{\sigma\epsilon}^\mu \equiv 0. \quad (76a)$$

Nun führen wir die gemischte Tensordichte  $\mathfrak{B}_\epsilon^\nu$  ein, die mit der Beziehung

$$\mathfrak{B}_\epsilon^\nu = W_\epsilon^\nu \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} = \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} \quad (77)$$

definiert ist. Gewisse Glieder dieser Tensordichte werden durch kovariante Differentiation proportional der Delta-Funktion, was aus Gl. (28) ersichtlich ist. Diesen Teil der Vektordichte  $\mathfrak{B}_\epsilon^\nu$ , der in der leeren Raum-Zeit verschwindet, benennen wir  $\mathfrak{B}_\epsilon^\nu$ . Ebenso bezeichnen wir mit  $\hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}$  den Teil der Tensordichte  $\mathfrak{T}_{\mu\epsilon}$ , der auch der Delta-Funktion proportional ist und daher in der leeren Raum-Zeit verschwindet. Diese Glieder subtrahieren wir von der

Identität (76a) und haben dann

$$(\mathfrak{B}_{\epsilon;v}^v - \hat{\mathfrak{B}}_{\epsilon;v}^v) + [(\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} - \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}) g^{\mu v}]_{;v} - [\mathfrak{T}_{\mu v} g^{\sigma v} + (\mathfrak{T}_{\mu v} - \hat{\mathfrak{T}}_{\mu v})] I_{\sigma\epsilon}^{\mu} \equiv 0. \quad (76b)$$

Es gilt nun infolge der Gl. (36)

$$\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} - \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon} \equiv 0, \quad (78)$$

und zwar nicht nur in der leeren Raum-Zeit, sondern auch in den singulären Punkten, die die Teilchen darstellen. Dadurch ergibt sich die folgende Form der vier Identitäten

$$(\mathfrak{B}_{\epsilon;v}^v - \hat{\mathfrak{B}}_{\epsilon;v}^v) - \mathfrak{T}_{\mu v} g^{\sigma v} I_{\sigma\epsilon}^{\mu} \equiv 0. \quad (76c)$$

In der Maxwellschen Näherung wird die kovariante Ableitung nach  $I_{\mu}^{\nu}$  mit der Riemannschen (nach  $\left\{ \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \mu \nu \end{smallmatrix} \right\}$ ) identisch. Wir haben dann

$$\mathfrak{B}_{\epsilon;v}^v - \hat{\mathfrak{B}}_{\epsilon;v}^v \equiv 0. \quad (79)$$

Im reinen Gravitationsfeld (d. h. bei Abwesenheit des elektromagnetischen Feldes) folgt aus (79) weiter

$$\mathfrak{B}_{\epsilon;v}^v \equiv 0. \quad (80)$$

Die Identitäten in der Maxwellschen Näherung haben also dieselbe Form wie in der allgemeinen Relativitätstheorie.

In Analogie mit der Relativitätstheorie halten wir die Identitäten (76c) für den Erhaltungssatz für Energie und Impuls. Die gemischte Tensordichte  $\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\epsilon}^v$  benennen wir die Energie-Impuls-Tensordichte. In der unitären Theorie hat es keinen Sinn, sie in den Gravitations- und elektromagnetischen Anteil zu spalten, da beide einander so durchdringen, daß es unmöglich ist, sie zu separieren. Erst in der Maxwellschen Näherung wird diese Trennung möglich. Wenn wir die Benennung beider Anteile aus der Maxwellschen Näherung, wo sie sinnvoll ist, in die exakte unitäre Theorie übertragen, wo die Benennung nur formell wird, so haben wir

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\epsilon}^v = \mathfrak{U}_{\epsilon}^v + \mathfrak{B}_{\epsilon}^v. \quad (81)$$

Der explizite Ausdruck für die leere Raum-Zeit folgt aus der linken Seite der Gl. (42). Dabei stellt uns  $\mathfrak{U}_{\epsilon}^v$  den Gravitationsanteil

$$\mathfrak{U}_{\epsilon}^v = U_{\epsilon}^v \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{8\pi} \left[ \left( R_{\mu\epsilon} g^{\mu v} - \frac{1}{2} R_{\sigma\sigma} g^{\sigma\sigma} \zeta_{\epsilon}^v \right) - \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) \zeta_{\epsilon}^v \right] \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \quad (82)$$

und  $\mathfrak{B}_{\epsilon}^v$  den elektromagnetischen Anteil dar

$$\mathfrak{B}_{\epsilon}^v = V_{\epsilon}^v \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} = \frac{d^{-2}}{4\pi} \left[ -g^{\alpha\beta} \left( g_{\alpha\epsilon} \zeta_{\beta}^v - \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \zeta_{\beta}^{\sigma} \zeta_{\epsilon}^v \right) + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) \zeta_{\epsilon}^v \right] \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}}. \quad (83)$$

In der Maxwellschen Näherung nehmen beide vorangehenden Ausdrücke einfachere Form an:

$$U_{\epsilon}^{\nu} = \frac{1}{8\pi} \left( P_{\epsilon}^{\nu} - \frac{1}{2} P_{\alpha\sigma} h^{\alpha\sigma} \delta_{\epsilon}^{\nu} + \lambda \delta_{\epsilon}^{\nu} \right), \quad (84)$$

$$V_{\epsilon}^{\nu} = \frac{d^{-2}}{4\pi} \left( -k_{\epsilon\alpha} k^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} k_{\alpha\beta} k^{\alpha\beta} \delta_{\epsilon}^{\nu} \right). \quad (85)$$

Formell sind sie identisch mit den entsprechenden Ausdrücken der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell. Im speziellen lokalen geodätischen Koordinatensystem, in dem die Feldgleichung (60) durch (72) ersetzt wird, verschwindet sowohl  $U_{\epsilon;\nu}^{\nu}$  als auch  $\mathfrak{B}_{\epsilon;\nu}^{\nu}$ .<sup>58)</sup>

### Die Bewegungsgleichungen

Wie bekannt, haben Einstein und Grommer<sup>59)</sup> zum ersten Male nachgewiesen, daß in der allgemeinen Relativitätstheorie keine weitere Hypothese zur Ableitung der Bewegungsgleichungen nötig ist, da diese direkt aus den Feldgleichungen folgen. Diesen Gedanken haben später Einstein und Infeld<sup>25)</sup> weiter entwickelt.

Obwohl diese Methode, die Infeld<sup>24)</sup>, Callaway<sup>26)</sup>, Bonnor<sup>27)</sup> und der Verfasser in der Arbeit V auf die unitäre Theorie übertragen haben, den großen Vorteil hat, daß sie nur die Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit verwendet, so bevorzugen wir doch die neue Methode von Infeld<sup>2)</sup> <sup>60)</sup>, da sie die Ableitung der Bewegungsgleichungen bedeutend einfacher macht. Wir übertragen sie von der allgemeinen Relativitätstheorie jetzt auf die unitäre Theorie.

### Die Ableitung der Bewegungsgleichungen

Wir gehen von den aus dem kovarianten Variationsprinzip abgeleiteten Identitäten (76c) aus. Setzen wir in diese die Ausdrücke (82) und (83) ein, so erhalten wir vier Identitäten, die in der leeren Raum-Zeit gelten. Die Identitäten (76c) müssen aber auch dann erfüllt werden, wenn wir für  $\mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}$  die rechte Seite von Gl. (42) einsetzen. Wir haben dann

$$\left( -8\pi \sum_k \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}^{(k)} g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} - \hat{\mathfrak{B}}_{\epsilon;\nu}^{\nu} + 8\pi \sum_k \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\nu}^{(k)} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\sigma\epsilon}^{\mu} \equiv 0.$$

Nach der Multiplikation mit  $(-h^{\omega\epsilon}/8\pi)$  erhalten wir

$$\left( \sum_k \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}^{(k)} g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} h^{\omega\epsilon} + \frac{1}{8\pi} \hat{\mathfrak{B}}_{\epsilon;\nu}^{\nu} h^{\omega\epsilon} - \sum_k \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\nu}^{(k)} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\sigma\epsilon}^{\mu} h^{\omega\epsilon} \equiv 0. \quad (86)$$

Nach der Regel von der Differentiation eines Produktes gilt die folgende Beziehung für die kovariante Ableitung der Tensordichte  $h^{\omega\epsilon} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}$ :

$$\begin{aligned} (h^{\omega\epsilon} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu})_{;\nu} &= h^{\omega\epsilon} \mathfrak{B}_{\epsilon;\nu}^{\nu} + h^{\omega\epsilon}_{;\nu} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu} \\ &= h^{\omega\epsilon} \mathfrak{B}_{\epsilon;\nu}^{\nu} + (h^{\omega\epsilon}_{;\nu} + h^{\sigma\epsilon} Q_{\sigma\nu}^{\omega} + h^{\omega\sigma} Q_{\sigma\nu}^{\epsilon}) \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}, \end{aligned} \quad (87)$$

<sup>58)</sup> Siehe Fußnote 17, S. 165 und 276.

<sup>59)</sup> A. Einstein u. J. Grommer, S.-B. Berlin. Akad. 2 (1927).

<sup>60)</sup> L. Infeld u. J. Plebanski, Bull. Acad. Polon. Sci. 4, 757 (1956). L. Infeld, Acta Phys. Polon. 16, 177 (1957). L. Infeld, Rev. mod. Physics 29, 389 (1957).

wo der Tensor  $Q_{\sigma\nu}^{\omega}$  durch die Formel<sup>61)</sup>

$$Q_{\sigma\nu}^{\omega} = I_{\sigma\nu}^{\omega} - \left\{ \begin{matrix} \omega \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} = h^{\omega\alpha} (I_{\alpha\sigma}^{\beta} g_{\nu\beta} + I_{\alpha\nu}^{\beta} g_{\sigma\beta}) \quad (88)$$

gegeben ist. Da die Riemannsche kovariante Ableitung des Fundamentalsensors gleich Null ist,

$$h^{\omega\epsilon}{}_{;\nu} = 0,$$

so nimmt die Gleichung (87) folgende Form ein:

$$\begin{aligned} h^{\omega\epsilon} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}{}_{;\nu} &= (\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} h^{\omega\epsilon})_{;\nu} \\ &\quad - \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} (h^{\sigma\epsilon} h^{\omega\alpha} + h^{\omega\sigma} h^{\epsilon\alpha}) (I_{\alpha\sigma}^{\beta} g_{\nu\beta} + I_{\alpha\nu}^{\beta} g_{\sigma\beta}). \end{aligned} \quad (87a)$$

Es gilt hier aber

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} (h^{\sigma\epsilon} h^{\omega\alpha} + h^{\omega\sigma} h^{\epsilon\alpha}) I_{\alpha\sigma}^{\beta} g_{\nu\beta} \\ = \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} g_{\nu\beta} h^{\omega\alpha} h^{\epsilon\sigma} (I_{\alpha\sigma}^{\beta} + I_{\sigma\alpha}^{\beta}) = 0 \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} (h^{\sigma\epsilon} h^{\omega\alpha} + h^{\omega\sigma} h^{\epsilon\alpha}) I_{\alpha\nu}^{\beta} g_{\sigma\beta} \\ = \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} h^{\omega\alpha} h^{\epsilon\sigma} (g_{\beta\sigma} I_{\alpha\nu}^{\beta} + g_{\beta\alpha} I_{\nu\sigma}^{\beta}), \end{aligned}$$

so daß wir schließlich haben

$$h^{\omega\epsilon} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}{}_{;\nu} = (\mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} h^{\omega\epsilon})_{;\nu} - \mathfrak{T}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} h^{\omega\alpha} h^{\epsilon\sigma} (g_{\beta\sigma} I_{\alpha\nu}^{\beta} + g_{\beta\alpha} I_{\nu\sigma}^{\beta}). \quad (87b)$$

Auf Grund dieser Beziehung führen wir die Identitäten (86) in die Form

$$\begin{aligned} \sum_k \{ (\hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}^{(k)} g^{\mu\nu} h^{\omega\epsilon})_{;\nu} + \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}^{(k)} h^{\omega\alpha} [g^{\epsilon\sigma} I_{\sigma\alpha}^{\mu} \\ + g^{\mu\nu} h^{\epsilon\sigma} (g_{\beta\sigma} I_{\alpha\nu}^{\beta} + g_{\beta\alpha} I_{\nu\sigma}^{\beta})] \} + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}{}_{;\nu} h^{\omega\epsilon} \equiv 0 \end{aligned} \quad (86a)$$

über.

Aus diesen vier partiellen Differentialgleichungen bilden wir 4  $p$  gewöhnliche Differentialgleichungen ( $p$  ist die Zahl der singulären Punkte), indem wir sie über das dreidimensionale Gebiet  $S^{(k)}$  integrieren, das stets nur einen singulären Punkt umschließt:

$$\begin{aligned} \int_{s^{(k)}} \left( \sum_k \{ (\hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}^{(k)} g^{\mu\nu} h^{\omega\epsilon})_{;\nu} + \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon}^{(k)} h^{\omega\alpha} [g^{\epsilon\sigma} I_{\sigma\alpha}^{\mu} \right. \\ \left. + g^{\mu\nu} h^{\epsilon\sigma} (g_{\beta\sigma} I_{\alpha\nu}^{\beta} + g_{\beta\alpha} I_{\nu\sigma}^{\beta})] \} + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}{}_{;\nu} h^{\omega\epsilon} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Diese Gleichungen sind die Folge der Feldgleichungen<sup>2)</sup>. Die kovariante Form von (89) lautet<sup>60)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds^{(k)}} \int_{s^{(k)}} \left( \sum_k \{ (\hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon} g^{\mu\nu} h^{\omega\epsilon})_{;\nu} + \hat{\mathfrak{T}}_{\mu\epsilon} h^{\omega\alpha} [g^{\epsilon\sigma} I_{\sigma\alpha}^{\mu} + g^{\mu\nu} h^{\epsilon\sigma} (g_{\beta\sigma} I_{\alpha\nu}^{\beta} \right. \\ \left. + g_{\beta\alpha} I_{\nu\sigma}^{\beta})] \} + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\epsilon}^{\nu}{}_{;\nu} h^{\omega\epsilon} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \end{aligned} \quad (90)$$

<sup>61)</sup> V. Hlavatý, J. Rat. Mech. Anal. 2, 4-5 (1953).



wobei  $ds^{(k)}$  das invariante und endliche Linienelement auf der Stelle der  $k$ -ten Singularität ist (im Sinne der Überlegungen von Infeld und Plebański<sup>(A)</sup>), wo es mit  $\tilde{ds}$  bezeichnet ist).

Um die explizite Form der Bewegungsgleichungen anzugeben, müssen wir zuerst den Ausdruck für  $\hat{\mathfrak{B}}_{\varepsilon;\nu}$  berechnen.

#### Die Berechnung des expliziten Ausdrucks für $\hat{\mathfrak{B}}_{\varepsilon;\nu}$

Führen wir die kovariante Ableitung von  $g^{\mu\nu}$  nach der symmetrischen affinen Konnexion  $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$  durch, so haben wir

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = g^{\mu\nu}{}_{,\nu}.$$

Es gilt dann mit Rücksicht auf Gln. (28) und (69)

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = g^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi d \sum_k \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\mu}. \quad (91)$$

Daraus folgt, daß die  $g^{\mu\nu}{}_{,\nu}$  enthaltenden Glieder singulär werden.

Um diese Glieder zu finden, schreiben wir zuerst den expliziten Ausdruck für  $\zeta_{\varepsilon}^{\sigma}$  und führen dann seine Ableitung durch. Nach der Definitionsgleichung (51) und den von Hlavatý abgeleiteten Beziehungen<sup>(62)</sup> haben wir

$$\zeta_{\varepsilon}^{\sigma} = g_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} = M \delta_{\varepsilon}^{\sigma} - \frac{k_{\varepsilon\sigma} k^{\rho\sigma}}{1 + \frac{1}{2} k_{\varepsilon\sigma} k^{\rho\sigma} + k} = M \delta_{\varepsilon}^{\sigma} + g_{\varepsilon\sigma} \left( g^{\rho\sigma} - \frac{\partial k}{\partial g_{\rho\sigma}} \right), \quad (92)$$

wobei

$$M = \frac{1 + \frac{1}{2} k_{\varepsilon\sigma} k^{\rho\sigma}}{1 + \frac{1}{2} k_{\varepsilon\sigma} k^{\rho\sigma} + k}, \quad (93)$$

$$k = \det g_{\alpha\beta} = (g_{12} g_{34} + g_{23} g_{14} + g_{31} g_{24})^2,$$

$$k_{\varepsilon\sigma} = g_{\varepsilon\sigma}, \quad k_{\varepsilon\sigma} = g_{\alpha\beta} h^{\alpha\varepsilon} h^{\beta\sigma}.$$

Aus Gln. (92) und (93) ergibt sich

$$\zeta_{\varepsilon}^{\sigma} = 4 \frac{1 + \frac{1}{4} k_{\varepsilon\sigma} k^{\rho\sigma}}{1 + \frac{1}{2} k_{\varepsilon\sigma} k^{\rho\sigma} + k}. \quad (94)$$

Bezeichnen wir mit

$$(\hat{\zeta}_{\varepsilon}^{\sigma} \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}})_{;\nu}$$

den singulären Teil der kovarianten Ableitung, so haben wir nach Gln. (92) und (91)

$$(\hat{\zeta}_{\varepsilon}^{\sigma} \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}})_{;\nu} = 4\pi d \sum_k \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\sigma} g_{\varepsilon\sigma}. \quad (95)$$

Aus den von Hlavatý abgeleiteten Beziehungen für  $R_{\mu\varepsilon}$  folgt<sup>(63)</sup>, daß  $(\hat{R}_{\mu\varepsilon} g^{\mu\nu} \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}})_{;\nu}$  keine singulären Glieder enthält.

<sup>(62)</sup> V. Hlavatý, J. Rat. Mech. Anal. 5, 427 (1956); 3, 110, 106 (1954).

<sup>(63)</sup> V. Hlavatý, J. Rat. Mech. Anal. 3, 120–121 (1954).

Auf Grund der eben angeführten Gleichungen sowie von (82) und (83) erhalten wir für  $\mathfrak{B}_{\varepsilon; \nu}^{\nu}$  den Ausdruck

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\varepsilon; \nu}^{\nu} = d^{-1} \sum_k \left( g_{\varepsilon\varrho} \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\varrho} \left\{ M + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} \zeta_{\beta}^{\sigma} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) - \frac{1}{2} d^2 \left[ \frac{1}{2} R_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} + \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) \right] \right\} + g^{\alpha\beta} g_{\varepsilon\alpha} g_{\beta\varrho} \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\varrho} \right). \quad (96)$$

Falls es sich um die Bewegung eines elektrisch geladenen Probeteilchens handelt, dann ist das Feld an der Stelle dieses Teilchens dasselbe, als wenn das Teilchen dort überhaupt nicht wäre („the background field“ von Infeld und Schild<sup>64</sup>) — siehe auch die Fußnote<sup>60</sup>). Dieses Feld ist hier durch die Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit bestimmt, wo nach Gln. (41) und (49)

$$-\frac{1}{2} R_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} H_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} = 2 d^{-2} \left[ -\frac{1}{2} d^2 \left( \frac{1}{2} R_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} - \frac{\lambda}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} \zeta_{\beta}^{\sigma} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right] = 0. \quad (97)$$

Es gilt dann

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_{\varepsilon; \nu}^{\nu} = d^{-1} \sum_k \left[ g_{\varepsilon\varrho} \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\varrho} \left( M + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \lambda d^2 \right) + g^{\alpha\beta} g_{\varepsilon\alpha} g_{\beta\varrho} \hat{\mathfrak{S}}^{(k)\varrho} \right]. \quad (98)$$

#### Die explizite Form der Bewegungsgleichungen

Die explizite Form der Bewegungsgleichungen erhalten wir, indem wir zuerst den Ausdruck (96) in (90) einsetzen. Falls alle Teilchen einfache Pole sind, so benützen wir für  $\hat{\mathfrak{S}}_{\mu\varepsilon}^{(k)}$  und  $\hat{\mathfrak{S}}^{(k)\varrho}$  die Ansätze (22) bzw. (23), die wir aus der allgemeinen Relativitätstheorie übernehmen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{dx_4}{ds^{(k)}} \int_{s^{(k)}} \left[ \sum_k \left\{ (m^{(k)} \dot{\xi}^{(k)\gamma} \dot{\xi}^{(k)\delta} h_{\gamma\mu} h^{\omega\alpha} \hat{\delta}^{(k)} [h_{\delta\varepsilon} g^{\varepsilon\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu} + g^{\mu\nu} (g_{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + g_{\beta\alpha} \Gamma_{\delta\nu}^{\beta})] \right\} + d^{-1} \sum_k q_j^{(k)} \hat{\delta}^{(k)} \dot{\xi}^{(k)\varrho} h^{\omega\varepsilon} \left( g_{\varepsilon\varrho} \left\{ M + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} \zeta_{\beta}^{\sigma} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) - \frac{1}{2} d^2 \left[ \frac{1}{2} R_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} + \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_{\sigma}^{\sigma} \right) \right] \right\} + g^{\alpha\beta} g_{\varepsilon\alpha} g_{\beta\varrho} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \quad (99)$$

Sie sind 4  $p$  gewöhnliche Differentialgleichungen für die 4  $p$  Unbekannten:

$$\dot{\xi}^{(k)\varrho}(x_4), \quad m^{(k)}(x_4); \quad c = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (100)$$

<sup>64</sup>) L. Infeld u. A. Schild, Rev. mod. Physics **21**, 408 (1949).

Sie bestimmen die Bewegung der  $p$  Singularitäten und zugleich die Abhängigkeit der Masse  $m^{(k)}$  von der Zeit. Sie müssen zusammen mit den Feldgleichungen gelöst werden.

In der Maxwellschen Näherung werden die Bewegungsgleichungen bedeutend einfacher:

$$\frac{dx_4}{ds^{(k)}} \int \sum_k \left\{ (m^{(k)} \dot{\xi}^{(k)\nu} \dot{\xi}^{(k)\omega} \hat{\delta}^{(k)})_{;\nu} + d^{-1} q_0^{(k)} \dot{\xi}^{(k)\epsilon} h^{\omega\epsilon} g_{\epsilon\rho} \hat{\delta}^{(k)} \right. \\ \left. \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} d^2 \left( \frac{1}{2} P_{\epsilon\sigma} h^{\epsilon\sigma} - \lambda \right) \right] \right\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \quad (101)$$

Wenn wir in der eckigen Klammer das zweite Glied gegen das erste vernachlässigen, da die Naturkonstante  $d^2$  sicher einen geringen Wert hat, so werden die Bewegungsgleichungen identisch mit denen, die Infeld für die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell gefunden hat<sup>65)</sup>, denn der Ausdruck

$$\sum_k d^{-1} q_0^{(k)} \dot{\xi}^{(k)\epsilon} h^{\omega\epsilon} g_{\epsilon\rho} \hat{\delta}^{(k)}$$

ist die kovariante Divergenz des Tensordichte des elektromagnetischen Feldes, die Infeld mit  $E^{\mu\nu}$ , bezeichnet hat.

#### Die Bewegung von zwei Körpern in der niedrigsten Näherung

Dieses Problem wurde schon in der Arbeit V gelöst. Um zu zeigen, wie die Berechnung der Bewegung von zwei Körpern von vergleichbaren Massen schon in der niedrigsten Näherung bedeutend einfacher wird, bestimmen wir die Bewegungsgleichungen jetzt mit der neuen Methode.

Für den Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  setzen wir wieder die Entwicklungen in die Potenzreihen (V. 14a-e) nach einem sehr kleinen Parameter  $\varepsilon$ . In der niedrigsten Näherung, d. h. einschließlich der Glieder der Ordnung  $\varepsilon^4$ , lauten die Bewegungsgleichungen (99)

$$\int_{s^{(k)}} \left[ \sum_k (m^{(k)} \dot{\xi}^{(k)s} \hat{\delta}^{(k)})_{;4} + d^{-1} q_0^{(k)} \hat{\delta}^{(k)} \delta^{sm} g_{m4} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \quad (102)$$

Hier haben wir die kovariante Ableitung nach der symmetrischen affinen Konnexion  $\Gamma_{\mu\nu}^\epsilon$  durch die Riemannsche ersetzt, da in der Ordnung  $\varepsilon^2$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \mu \nu \end{Bmatrix},$$

und haben den Ausdruck

$$-\frac{1}{2} d^2 \left[ \frac{1}{2} R_{\epsilon\sigma} g^{\epsilon\sigma} + \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \zeta_\sigma^\sigma \right) \right]$$

wegen seiner Kleinheit gegen 1 vernachlässigt.

Die Bewegungsgleichungen (102) lösen wir nun zusammen mit den Feldgleichungen. Diese zerfallen in der niedrigsten Näherung in die Gleichungen des Gravitationsfeldes und in die des elektromagnetischen Feldes.

Mit der Berechnung des Gravitationsanteiles werden wir uns nicht befassen, da wir die Ergebnisse aus der Arbeit von Infeld<sup>2)</sup> übernehmen können.

<sup>65)</sup> L. Infeld, Bull. Acad. Polon. Sci. 3, 213 (1955). Siehe auch S. Bażański, Acta Phys. Polon. 15, 363 (1956).

Hier findet man in der dritten Approximation

$$m^{(k)} = m_0^{(k)} = \text{konst.}, \quad k = 1, 2,$$

und in der vierten (für das erste Teilchen,  $k = 1$ )

$$\int_{s(1)} \sum_k (m^{(k)} \xi^{(k)s} \delta^{(k)})_4 dx_1 dx_2 dx_3 = m_0^{(1)} \frac{d^2 \xi^{(1)s}}{dt^2} + m_0^{(1)} m_0^{(2)} \frac{\xi^{(1)s} - \xi^{(2)s}}{q^3}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (103)$$

wobei  $q$  die Entfernung des ersten Teilchens vom zweiten bezeichnet

$$q = \sqrt{(\xi^{(1)m} - \xi^{(2)m}) (\xi^{(1)m} - \xi^{(2)m})}. \quad (104)$$

Die Feldgleichungen (28), in die wir den Ansatz (23) zusammen mit Gl. (25) und (70) einsetzen, lauten in der zweiten Approximation

$$g_{4,m}^{(n)} = 4 \pi d \sum_n q_0^{(n)} \delta^{(n)},$$

denn nach den Entwicklungen (V. 14a-e) ist in der nullten Approximation

$$\sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} = 1.$$

Setzen wir

$$g_{4,m}^{(n)} = g_{m4} = -\Psi_{,m},$$

so geht die vorangehende Differentialgleichung in die bekannte Poissonsche Gleichung

$$\Delta \Psi = -4 \pi d \sum_n q_0^{(n)} \delta^{(n)}$$

über, deren partikulares Integral lautet

$$\Psi = d \sum_n \frac{q_0^{(n)}}{r^{(n)}},$$

und wir finden

$$g_{m4} = d \sum_n \frac{q_0^{(n)}}{r^{(n)2}} \cdot \frac{x_m - \xi^{(n)m}}{r^{(n)}}. \quad (105)$$

Dabei ist  $r^{(n)}$  die räumliche Entfernung zwischen dem Punkt mit den Koordinaten  $x_m$  und dem  $n$ -ten Teilchen mit den Koordinaten  $\xi^{(n)m}$

$$r^{(n)} = \sqrt{(x_m - \xi^{(n)m}) (x_m - \xi^{(n)m})}. \quad (106)$$

Setzen wir nun Gl. (105) in (102) ein, so ergibt sich

$$\int_{s(1)} \sum_k d^{-1} q_0^{(k)} \delta^{(k)} \delta^{(n)} g_{m4} dx_1 dx_2 dx_3 = -q_0^{(1)} q_0^{(2)} \frac{\xi^{(1)s} - \xi^{(2)s}}{q^3}, \quad s = 1, 2, 3. \quad (107)$$

Die Bewegungsgleichungen in der niedrigsten Näherung erhalten wir nach Gl. (102) aus (103) und (107). Sie nehmen die bekannte Form an:

$$m_0^{(1)} \frac{d^2 \xi^{(1)s}}{dt^2} = -m_0^{(1)} m_0^{(2)} \frac{\xi^{(1)s} - \xi^{(2)s}}{q^3} + q_0^{(1)} q_0^{(2)} \frac{\xi^{(1)s} - \xi^{(2)s}}{q^3}. \quad (108)$$

Vergleichen wir diese Berechnung mit der Arbeit V, so stellen wir fest, wie einfach sie jetzt geworden ist. In der niedrigsten Näherung ist überhaupt nicht mehr nötig, das System von 64 algebraischen Gleichungen (5) zu lösen.

## Die Bewegungsgleichungen eines elektrisch geladenen Probeteilchens

Mit der Frage der Ableitung der Bewegungsgleichungen eines elektrisch geladenen Probeteilchens aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie hat sich schon Einstein<sup>60)</sup> befaßt, die exakte Lösung haben aber erst Infeld und Schild<sup>64)</sup> gegeben.

Die Bewegungsgleichungen eines elektrisch geladenen Probeteilchens wurden, soweit dem Verfasser bekannt, noch nicht in der unitären Theorie abgeleitet. Diese schwierige Aufgabe wird aber bedeutend einfacher, falls wir dazu die neue Methode verwenden. Die Überlegungen von Infeld und Schild<sup>64)</sup> über das „background field“ werden überflüssig durch die Einführung der modifizierten Delta-Funktion von Infeld und Plebański<sup>46)</sup> 60).

Um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen, integrieren wir in Gl. (99) über das dreidimensionale, das Probeteilchen enthaltende Gebiet, wobei wir das unitäre Feld für das äußere, gegebene Feld halten und zugleich (97) berücksichtigen. Den das Teilchen bezeichnenden Index  $k$  schreiben wir nicht mehr. Wir haben dann

$$\frac{dx_A}{ds} \left\{ (m \xi^\nu \xi^\omega \zeta_\nu^A)_{,4} + (m \xi^\nu \xi^\sigma \zeta_\sigma^A) \Gamma_{\gamma\delta}^\omega \right. \\ \left. + m \xi^\nu \xi^\delta h_{\gamma\mu} h^{\omega\alpha} [h_{\delta\epsilon} g^{\epsilon\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + g^{\mu\tau} (g_{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\tau}^\beta + g_{\beta\gamma} \Gamma_{\delta\tau}^\beta)] \right. \\ \left. + d^{-1} q_0 \xi^\nu h^{\omega\epsilon} \left[ g_{\epsilon\varrho} \left( M + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \lambda d^2 \right) + g^{\alpha\beta} g_{\epsilon\alpha} g_{\beta\varrho} \right] \right\} = 0.$$

Setzen wir<sup>65)</sup>

$$m = m_0 \frac{dx_A}{ds}, \quad (109)$$

wobei  $m_0$  die Ruhmasse des Probeteilchens bezeichnet, so geht die vorangehende Gleichung unter der Annahme, daß im gegebenen unitären Feld die Beziehung

$$\zeta_\alpha^\beta = g_{\mu\alpha} g^{\mu\beta} = N(\alpha) \delta_\alpha^\beta \quad (110)$$

gilt, in die folgende Form über:

$$N(4) \left\{ \frac{d^2 \xi^\omega}{ds^2} + \frac{d\xi^\gamma}{ds} \frac{d\xi^\delta}{ds} \left\{ N(\delta) \Gamma_{\gamma\delta}^\omega + h_{\gamma\mu} h^{\omega\alpha} [h_{\delta\epsilon} g^{\epsilon\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + g^{\mu\tau} (g_{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\tau}^\beta + g_{\beta\gamma} \Gamma_{\delta\tau}^\beta)] \right. \right. \\ \left. \left. + g_{\beta\alpha} \Gamma_{\delta\tau}^\beta \right\} + d^{-1} \frac{q_0}{m_0} \frac{d\xi^\nu}{ds} h^{\omega\epsilon} \left[ g_{\epsilon\varrho} \left( M + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \lambda d^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + g^{\alpha\beta} g_{\epsilon\alpha} g_{\beta\varrho} \right] \right\} = 0. \quad (111)$$

Für den Index  $\alpha$  im Symbol  $N(\alpha)$  gilt die übliche Summationsvorschrift nicht.

In der Maxwellschen Näherung lauten die Bewegungsgleichungen wie folgt

$$\frac{d^2 \xi^\omega}{ds^2} + \left\{ \omega \right\} \frac{d\xi^\gamma}{ds} \frac{d\xi^\delta}{ds} + d^{-1} \frac{q_0}{m_0} \frac{d\xi^\nu}{ds} h^{\omega\epsilon} g_{\epsilon\varrho} = 0. \quad (112)$$

Sie ergeben sich aus Gl. (111), indem wir die quadratischen und höheren Glieder in  $g_{\mu\nu}$  (und auch die geringe Konstante  $\frac{1}{2} \lambda d^2$ ) vernachlässigen. Sie haben die bekannte Form der Bewegungsgleichungen eines elektrisch geladenen Probeteilchens in der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell.

<sup>60)</sup> A. Einstein, S.-B. Berlin. Akad. 235 (1927).

### Die Integration der Bewegungsgleichungen eines Probeteilchens im statischen kugelsymmetrischen unitären Feld

Das statische kugelsymmetrische unitäre Feld. Auf Grund der Untersuchungen von Papapetrou<sup>67)</sup> haben wir in der Arbeit I für den Fundamentaltensor  $g_{\mu\nu}$  den Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (113)$$

gemacht und aus den Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit festgestellt, daß

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3} r^2 + d^{-2} \frac{l^4}{r^2}, \quad (114)$$

$$\gamma = \left(1 + \frac{l^4}{r^4}\right) \cdot \frac{1}{\alpha}, \quad (115)$$

$$w = \frac{l^2}{r^2}, \quad (116)$$

wobei  $m$  und  $l$  die Integrationskonstanten sind. Weiter haben wir in unserer Bezeichnungswiese

$$\Phi_{14} = -\Phi_{41} = d^{-2} \frac{l^2}{r^2} \left(1 + \frac{1}{6} \lambda d^2 - \frac{2m d^2}{r^3} + \frac{5}{2} \frac{l^4}{r^4}\right). \quad (117)$$

Die Ergebnisse der Untersuchung stellen wir in die folgenden Punkte zusammen:

1. Für  $l=0$  gehen alle Gleichungen der vorliegenden unitären Theorie in die der allgemeinen Relativitätstheorie über.

2. Für  $r \rightarrow \infty$  gehen die Funktionen  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $w$  und  $\Phi_{14}$  asymptotisch in die Lösung für die elektrische Punktladung in der allgemeinen Relativitätstheorie über, wenn wir in Übereinstimmung mit Gl. (69) setzen

$$q = d^{-1} l^2 \quad (118)$$

und das Gaußsche System von Einheiten statt des Heavisideschen benutzen, das Eddington verwendete<sup>68)</sup>. Das letzte Glied auf der rechten Seite von (114) enthält die Konstante  $d^{-2}$  und erscheint weder in der unitären Theorie von Einstein, noch in der von Schrödinger, wo  $d^{-2} = 0$ . Die Existenz dieses Gliedes in Gl. (114) ist ein Erfolg der vorliegenden Theorie.

3. Aus dem Vergleich mit der allgemeinen Relativitätstheorie folgt, daß die Integrationskonstante  $m$  die Masse des das Feld erzeugenden Körpers ist. Den numerischen Wert von  $m$  könnten wir bestimmen, indem wir die Berechnungsmethode von Trautman<sup>69)</sup> von der allgemeinen Relativitätstheorie auf die unitäre Theorie übertragen würden.

4. Aus Gl. (114) folgt, daß der Ansatz (113) das „elektrische“ kugelsymmetrische und nicht das „magnetische“ Feld beschreibt, wie es manchmal behauptet wird. Der Ansicht sich anzulehnen, daß es sich um ein magne-

<sup>67)</sup> A. Papapetrou, Proc. Roy. Irish Acad. A 52, 69 (1948).

<sup>68)</sup> Siehe Fußnote 17, S. 280.

<sup>69)</sup> A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci. 4, 439, 443 (1956).

tisches Feld handelt, würde bedeuten, die Konstante  $q$  in Gl. (118) für die magnetische Menge zu halten. Die Existenz der isolierten magnetischen Monopole wurde bisher in der Natur noch nie nachgewiesen und wir werden daher mit ihnen in der vorliegenden Theorie nicht rechnen. Die Integrationskonstante  $l^2$  ist dann direkt proportional der elektrischen Ladung des das Feld erzeugenden Körpers (siehe auch Gl. (28)).

5. Aus Gl. (118) folgt, daß für  $d \rightarrow 0$  auch  $l \rightarrow 0$ . Das bedeutet, daß die vorliegende Theorie für  $d \rightarrow 0$  asymptotisch in die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell übergeht. Darum halten wir die Naturkonstante  $d$  für die Kopplungskonstante zwischen dem Gravitations- und elektromagnetischen Anteil des unitären Feldes.

Setzen wir die berechneten Werte in Gln. (82) und (83) ein, so stellen wir fest, daß<sup>70)</sup>

$$\begin{aligned} U_1^4 &= U_4^4 = -V_1^4 = -V_4^4 = -\frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{r^4} \left(1 - \frac{l^2}{r^2}\right), \\ U_2^3 &= U_3^3 = -V_2^3 = -V_3^3 = +\frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{r^4} \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (119)$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. Für  $r \rightarrow \infty$  werden die Komponenten identisch mit denen aus der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell. Auch dies ist ein Erfolg der vorliegenden Theorie, den die Theorie von Einstein-Schrödinger nicht erzielte.

Zusammenfassend kann man sagen, daß diese Ergebnisse ein weiterer Beweis für die Richtigkeit der hier angenommenen physikalischen Interpretation der vorliegenden Theorie sind.

Die explizite Form der Bewegungsgleichungen in den Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi, t)$  erhalten wir, indem wir die von Papapetrou berechneten Werte<sup>67)</sup> von  $\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon}$  in Gl. (111) einsetzen. Zugleich vernachlässigen wir die kosmologische Konstante  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} (1 + w^2) \frac{d^2 r}{ds^2} + \left[ (1 + w^2) \frac{\alpha'}{2\alpha} + \frac{2w}{r} \right] \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{r}{\alpha} \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 - \frac{r}{\alpha} \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \\ + (1 + w^2) \left( \frac{\gamma'}{2\alpha} + \frac{2w^2}{r^2} \right) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - d^{-1} \frac{q_0}{m_0} \frac{dt}{ds} \frac{w}{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{2} w^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (120)$$

$$(1 + w^2) \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r} (1 + w^2) \frac{dr}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (121)$$

$$(1 + w^2) \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} (1 + w^2) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cot \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} (1 + w^2) \frac{d^2 t}{ds^2} + \left[ (2 + w^2) \frac{\gamma'}{2\gamma} + \frac{2w^2}{r(1 + w^2)} \right] \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} \\ - d^{-1} \frac{q_0}{m_0} \frac{w}{\gamma} \frac{dr}{ds} \left( 1 + \frac{1}{2} w^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (123)$$

Die Striche bezeichnen die Ableitungen nach  $r$ .

Die Integration der Bewegungsgleichungen. Es ergibt sich aus der Gl. (121), daß sich das Probeteilchen mit der Ruhmasse  $m_0$  und der elektrischen Ladung  $q_0$  in der Ebene  $\vartheta = \pi/2$  bewegen wird, falls es sich in dieser Ebene

<sup>70)</sup> Die Angaben der Gl. (II.30) und (II.31) sind nicht richtig. In der letzteren ist daneben ein Druckfehler nicht korrigiert.



anfänglich bewegt hat. Da

$$\frac{d\theta}{ds} = 0 \quad (124)$$

ist, so nimmt die Gl. (122) die einfachere Form

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (125)$$

ein. Sie ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für  $d\varphi/ds$ . Nach Einsetzen von  $w$  aus Gl. (116) erhalten wir durch Integration

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{K_1}{r^2}, \quad (126)$$

wobei  $K_1$  eine Integrationskonstante ist.

Auch die Gl. (123) ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für  $dt/ds$ , deren allgemeines Integral lautet

$$\frac{dt}{ds} = \exp \left\{ \int -D_1 ds \right\} [K_2 - \int D_2 \exp \left( \int D_1 ds \right) ds]. \quad (127)$$

Es bedeutet hier

$$D_1 = \left[ \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{w^2}{1+w^2} \left( \frac{1}{1+w^2} \cdot \frac{2}{r} + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma} \right) \right] \frac{dr}{ds}, \quad (128)$$

$$D_2 = -d^{-1} \frac{q_0}{m_0} \frac{w}{\gamma} \frac{1 + \frac{1}{2} w^2}{1 + w^2} \frac{dr}{ds}. \quad (129)$$

Da wir die Integration der resultierenden Gleichung mit Hilfe der sukzessiven Approximation durchführen werden, entwickeln wir die Funktionen  $D_1$ ,  $D_2$  in die Potenzreihen und beschränken uns dabei auf die Glieder bis zu  $r^{-6}$  einschließlich. Wir finden dadurch

$$D_1 \cong \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{dr}{ds} - \frac{l^4 m}{r^6} \frac{dr}{ds}, \quad (128a)$$

$$D_2 \cong -\frac{q_0}{m_0} \frac{l^2 d^{-1}}{\gamma} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{l^4}{r^6} \right) \frac{dr}{ds}. \quad (129a)$$

Nachdem wir die beiden Integrationen in Gl. (127) durchgeführt haben, erhalten wir

$$\frac{dt}{ds} = \frac{V_1 + K_2 V_2}{\gamma}, \quad (130)$$

wobei  $K_2$  die zweite Integrationskonstante ist und weiter

$$V_1 = -\frac{q_0}{m_0} l^2 d^{-1} \left( u - \frac{1}{10} l^4 u^5 \right), \quad (131)$$

$$V_2 = 1 - \frac{l^4 m}{5} u^5. \quad (132)$$

Hier haben wir die Substitution

$$u = \frac{1}{r} \quad (133)$$

eingeführt, die wir auch weiterhin benutzen werden.

Nun setzen wir die Gln. (124), (126) und (130) in den Ausdruck für das Intervall  $ds$

$$\alpha \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \gamma \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = -1$$

ein und erhalten mit Rücksicht auf Gl. (124)

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{1}{K_1^2} \frac{(V_1 + K_2 V_2)^2}{1 + l^4 u^4} - \frac{1}{K_1^2} \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) u^2. \quad (134)$$

Wenn wir diese Gleichung nach  $\varphi$  differenzieren und dann durch  $2 du/d\varphi$  dividieren, finden wir nach einigen Umformungen, bei welchen wir nur die Glieder bis  $u^4$  einschließlich berücksichtigen:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + c^2 u = \frac{c^2}{p} + 3 m u^2 + S_1 u^3 + S_2 u^4, \quad (135)$$

wobei

$$c^2 = 1 - \frac{\Lambda^2 - q^2}{K_1^2}, \quad (136)$$

$$\frac{c^2}{p} = \frac{m - \Lambda K_2}{K_1^2}, \quad (137)$$

$$S_1 = -2 q^2 \left( 1 + \frac{K_2^2 d^2}{K_1^2} \right), \quad (138)$$

$$S_2 = q^2 d^2 \frac{K_2}{K_1^2} \left( \frac{11}{2} \Lambda - K_2 m \right). \quad (139)$$

Hier bedeutet  $q$  die elektrische Ladung des das unitäre Feld erzeugenden Körpers

$$q = l^2 d^{-1}, \quad (140)$$

$m$  seine Masse und

$$\Lambda = \frac{q_0}{m_0} l^2 d^{-1} = \frac{q_0 q}{m_0}. \quad (141)$$

Nun lösen wir Gl. (135) mit Hilfe der sukzessiven Approximation. Die zweite Näherung lautet

$$u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\tilde{c} \varphi - \omega)], \quad (142)$$

mit

$$\tilde{c} = c - \frac{3m}{p} - \frac{3S_1}{2cp^2} \left( 1 + \frac{e^2}{4} \right) - \frac{2S_2}{cp^3} \left( 1 + \frac{3e^2}{4} \right). \quad (143)$$

Die Bahn des elektrisch geladenen Probeteilchens im statischen kugelsymmetrischen unitären Feld ist daher in der zweiten Näherung eine Ellipse mit dem Parameter  $2p$ , deren Perihel sich (für  $\tilde{c} < 1$  im Sinne des Umlaufes) dreht. Die Integrationskonstanten sind die numerische Exzentrizität  $e$  und die Perihellänge  $\omega$ .

Spezialfälle der Bewegung eines Probeteilchens. Linearisieren wir Gl. (135) und vernachlässigen zugleich in (137) die Gravitationswirkung des zentralen Körpers ( $m = 0$ ) und in (136)  $q^2$  gegen  $\Lambda^2$  (denn es ist  $q^2 \ll \Lambda^2$ ), dann beschreibt uns Gl. (142) die exakte Lösung dieses Spezialfalles der Bewegung, bei der

$$\tilde{c} = c = \sqrt{1 - \frac{\Lambda^2}{K_1^2}}. \quad (144)$$

Dieser Fall stellt uns die Bewegung eines Probeteilchens nach der speziellen Relativitätstheorie dar und ist in voller Übereinstimmung mit den Beziehungen von Sommerfeld<sup>71)</sup> für die relativistische Kepler-Bewegung eines Elektrons im wasserstoffähnlichen Atom.

Wenn wir die elektrische Ladung des zentralen Körpers gleich Null setzen ( $q = A = 0$ ), so beschreibt uns Gl. (142) die Bewegung eines Probeteilchens im reinen Gravitationsfeld, wobei jetzt

$$\tilde{c} = 1 - \frac{3m}{p} = 1 - \frac{3m^2}{K_1^2}. \quad (145)$$

Dieser Fall ist in voller Übereinstimmung mit der allgemeinen Relativitätstheorie<sup>72)</sup>.

Aus den Gleichungen, die in der unitären Theorie gelten, geht hervor, daß die Bahn des Probeteilchens von der elektrischen Ladung durch das Glied  $q^2$  in (136) beeinflusst wird und zwar auch dann, wenn das Teilchen elektrisch ungeladen ist. Diese Erscheinung tritt schon in der ersten Approximation hervor. Der weiteren, für die unitäre Theorie charakteristischen Erscheinung begegnen wir in der zweiten Approximation, die wir vom prinzipiellen Standpunkt aus zur Bestimmung des numerischen Wertes der Naturkonstante  $d$  benützen könnten. Diese Korrektionsglieder liegen aber im wasserstoffähnlichen Atom, in dem nur ein kugelsymmetrisches elektrisches Feld in der Natur vorkommt, weit unterhalb der Beobachtungsgrenze.

Wie es zu erwarten war, unterscheiden sich die Ergebnisse unserer Berechnung von denen aus der Arbeit III, wo die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Variationsprinzips der stationären Teilchenwirkung und nicht aus den Feldgleichungen abgeleitet wurden, nur in den Korrektionsgliedern, die aber für quantitative Überprüfung der Theorie entscheidend sind.

### Die Naturkonstanten der unitären Theorie

#### Das Fundamentalsystem von Einheiten

In allen Gleichungen der vorliegenden Arbeit wird die Zeit, die Masse und die elektrische Ladung in geometrischen Einheiten gemessen. Die entsprechenden Umrechnungsfaktoren sind:

$$1 \text{ Sekunde} = c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm}, \quad (146)$$

$$1 \text{ Gramm} = K c^{-2} = 7,418 \cdot 10^{-29} \text{ cm}, \quad (147)$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ elektrost. Einheit der Ladung im Gaußschen Maßsystem} \\ = K^{1/2} c^{-2} = 2,873 \cdot 10^{-25} \text{ cm}. \end{aligned} \quad (148)$$

Hier bezeichnet  $c$  die Lichtgeschwindigkeit  $2,998 \cdot 10^{10}$  cm/sec und  $K$  die Gravitationskonstante  $6,667 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>3</sup>/g sec<sup>2</sup>. In diesem System von Einheiten,

<sup>71)</sup> A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, I. Bd., 5. Aufl. Braunschweig 1931, S. 272.

<sup>72)</sup> Siehe Fußnote 17, S. 119–129.

das üblicherweise in der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet wird, werden also alle physikalischen Größen mit einer Einheit der Länge gemessen, deren Wert von unserer freien Wahl abhängt.

In der vorliegenden unitären Theorie ist möglich, ein solches System von Einheiten zu bilden, in dem auch diese letzte Willkür beseitigt ist. In diesem System messen wir die Länge mit der Einheit, in welcher die neue Naturkonstante  $d$  den Wert 1 hat. Statt der vorangehenden drei Formeln gelten jetzt die folgenden vier Umrechnungsfaktoren:

$$1 \text{ cm} = d^{-1}, \quad (149)$$

$$1 \text{ Sekunde} = c d^{-1}, \quad (150)$$

$$1 \text{ Gramm} = K c^2 d^{-1}, \quad (151)$$

$$1 \text{ elektrost. Einheit der Ladung im Gaußschen Maßsystem} \\ = K^{-1/2} c^{-2} d^{-1}. \quad (152)$$

Die Einführung dieses neuen Fundamentalsystems von Einheiten in die klassische Physik, in dem alle Größen mit dimensionslosen Zahlen ausgedrückt werden, ist dadurch möglich geworden, daß die vorliegende Theorie eine dritte Naturkonstante von der Dimension einer Länge enthält. Dieses Fundamentalsystem von Einheiten hat deshalb seine Wurzeln in den Naturgesetzen. Es hängt nicht, wie z. B. ein ähnliches System der allgemeinen Relativitätstheorie, in dem die kosmologische Konstante gleich 1 gesetzt ist, von der gesamten Masse des höchst hypothetischen Modells des Weltalls ab, und wir müssen es daher bevorzugen.

#### Der Zusammenhang der Naturkonstanten

An dem Glauben von Einstein<sup>34)</sup> in die Einfachheit und Verständlichkeit der Natur nimmt Heisenberg<sup>35)</sup> mit seiner Hypothese teil, nach der alle Naturkonstanten nur auf drei zurückzuführen sind. Gehen wir von dieser Hypothese aus, so müssen wir die Existenz einer Formel voraussetzen, die die drei Konstanten der vorliegenden Theorie mit der elementaren elektrischen Ladung verbindet. Dimensionsmäßige Überlegungen zeigen, daß sie die Form

$$e = \pm P d c^2 K^{-1/2} \quad (153)$$

haben muß. Das doppelte Zeichen  $\pm$  ist die Folge des Wurzelzeichens von  $d^2$ , das in der vorliegenden Theorie wie eine neue Naturkonstante (siehe Gl. (7)) vorkommt. Weiter bezeichnet  $P$  eine dimensionslose Zahl, deren numerischer Wert eine künftige Theorie angeben sollte. Nach Gl. (153) erscheint die elektrische Ladung jedes Teilchens bzw. Körpers als das ganze Vielfache des Proportionalitätsfaktors  $P$ .

Aus der Hypothese von Heisenberg ergibt sich unmittelbar, daß die Konstante  $P$  einen von Null verschiedenen Wert haben muß. Ebenso wie die Tatsache der endlichen Lichtgeschwindigkeit den Übergang von der Newtonschen Mechanik zur speziellen Relativitätstheorie zur Folge hatte,

so zwingt uns nun die Tatsache der Existenz der elementaren elektrischen Ladung, die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell zufolge der Gl. (153) durch die vorliegende unitäre Theorie zu ersetzen. Dies scheint ein neues Licht auf die Bedeutung des diskontinuierlichen Charakters der elektrischen Ladung im Rahmen einer unquantisierten Theorie zu werfen.

Für die fundamentalen Naturkonstanten haben wir  $c$ ,  $K$  und  $d$  gehalten. Statt dessen können wir aber mit demselben Recht für die fundamentalen Konstanten  $c$ ,  $K$  und  $e$  betrachten, so daß dann die neue Naturkonstante  $d^2$  durch die Beziehung

$$d^2 = P^{-2} e^2 K c^{-4} \quad (154)$$

gegeben ist.

Setzen wir neben den schon angegebenen Werten von  $c$  und  $K$  in die Formel (154) noch die elementare elektrische Ladung  $e = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-2}$  ein, so stellen wir fest, daß

$$P d = e K^{1/2} c^{-2} = 1,380 \cdot 10^{-34} \text{ cm} \quad (155)$$

ist, d. h. es ist gleich der in geometrischer Einheit gemessenen elektrischen Ladung (was aus dem Umrechnungsfaktor (152) ersichtlich ist).

Es gibt nun drei Hypothesen, die wir über die Konstanten  $e$ ,  $d$  und die elementare Länge  $l$  von Heisenberg<sup>73)</sup> machen können:

1. Wir identifizieren (größenordnungsmäßig, denn es können hier noch Zahlenfaktoren wie  $\pi$ ,  $e$  usw. vorkommen) die Kopplungskonstante  $d$  mit der elementaren Länge  $l$  und diese beiden mit der in geometrischer Einheit gemessenen elementaren elektrischen Ladung  $e$ . Alle Konstanten  $d$ ,  $l$ ,  $e$  liegen in der Größenordnung von  $10^{-34} \text{ cm}$ , und der dimensionslose Proportionalitätsfaktor  $P$  ist gleich oder größenordnungsmäßig gleich 1. Wir schreiben daher

$$d \equiv l \equiv e \cong 10^{-34} \text{ cm}, \quad P \cong 1. \quad (156)$$

2. Wir identifizieren (größenordnungsmäßig) die Kopplungskonstante  $d$  mit der elementaren Länge  $l$  und setzen voraus, daß sie von der Größenordnung von  $10^{-13} \text{ cm}$  sind. Der dimensionslose Proportionalitätsfaktor  $P$  liegt in der Größenordnung von  $10^{-20}$ , d. h. er ist gleich der Gravitationskopplungskonstante bzw. dem Quadrat der „schwachen“ Kopplungskonstante<sup>74)</sup>. Wir haben also:

$$d \equiv l \cong 10^{-13} \text{ cm}, \quad P \cong 10^{-20}, \quad e \equiv P d \cong 10^{-34} \text{ cm}. \quad (157)$$

3. Wir identifizieren (größenordnungsmäßig) die Kopplungskonstante  $d$  mit der elementaren elektrischen Ladung  $e$ . Der dimensionslose Proportionalitätsfaktor  $P$  ist gleich oder größenordnungsmäßig gleich 1. Das Verhältnis der elementaren Länge  $l$  zur Kopplungskonstante  $d$  liegt dann in der Größenordnung von  $10^{20}$ , d. h. es ist gleich dem reziproken Wert der Gravitations-

<sup>73)</sup> Nicht verwechseln die elementare Länge von Heisenberg  $l$  mit der Integrationskonstante  $l$  in Gl. (114)–(141)!

<sup>74)</sup> R. H. Dicke, Rev. mod. Physics 29, 355 (1957).

kopplungskonstante, bzw. dem Quadrat des reziproken Wertes der „schwachen“ Kopplungskonstante<sup>74)</sup>. Es gilt dann

$$d \cong e \cong 10^{-34} \text{ cm}, \quad P \cong 1, \quad l \cong 10^{20} d. \quad (158)$$

Die erste Hypothese widerspricht der von Heisenberg, daß die elementare Länge  $l$  von der Größenordnung von  $10^{-13} \text{ cm}$  ist<sup>35)</sup>, und scheint dem Verfasser unwahrscheinlich zu sein. Die zweite und dritte Hypothese sind zur Zeit gleichberechtigt, nach der dritten wäre allerdings die Kopplung zwischen dem Gravitations- und elektromagnetischen Anteil des unitären Feldes äußerst gering.

### Zusammenfassung

1. Die vorliegende unitäre Feldtheorie der Schwere und Elektrizität ist mit Hilfe des kovarianten Variationsprinzips aus einem heterogenen Hamiltonian abgeleitet. Zu den bekannten Postulaten von Einstein, den der Hamiltonian genügen soll, ist das vierte beigefügt, nach dem die Feldgleichungen der unitären Feldtheorie im starken Gravitations- und schwachen elektromagnetischen Feld (sog. Maxwellsche Näherung) in die der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell übergehen sollen.

2. Die Kompatibilität und Vollständigkeit der Feldgleichungen ist nachgewiesen. Es existieren  $10 + 4$  Feldgleichungen, die die Entstehung des unitären Feldes beschreiben, und weitere 4 Feldgleichungen, die die inneren Gesetzmäßigkeiten des Feldes angeben. Unter den 18 Feldgleichungen gibt es  $1 + 1 + 4$  Identitäten, so daß nur 12 unabhängige Feldgleichungen für 16 unbekannte Komponenten des Fundamentaltensors übrigbleiben.

3. Die physikalische Interpretation der geometrischen Felder ist auf Grund der Maxwellschen Näherung gegeben. Die Spezialfälle der vorliegenden Theorie, die Theorie von Einstein ( $\lambda = 0, d^{-2} = 0$ ), die von Schrödinger ( $\lambda \neq 0, d^{-2} = 0$ ) und die physikalische Interpretation der Theorie von Bonnor ( $\lambda = 0, d^{-2} \neq 0$ ) führen zu unzulässigen Konsequenzen.

4. Die  $1 + 1 + 4$  Identitäten unter den Feldgleichungen stellen vom physikalischen Standpunkt aus die Erhaltungssätze dar.

5. Die Bewegungsgleichungen kann man aus den Feldgleichungen für die leere Raum-Zeit ableiten. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der neuen Methode von Infeld, die hier aus der allgemeinen Relativitätstheorie auf die vorliegende unitäre Theorie ausgedehnt wurde, ist aber bedeutend einfacher. Die explizite Form der Bewegungsgleichungen für den Fall der Bewegung von zwei Körpern in niedrigster Näherung und für den Fall der Bewegung eines elektrisch geladenen Probeteilchens wurden angegeben. Für den letzteren Fall wurden sie auch integriert.

6. Die Ergebnisse der strengen statischen kugelsymmetrischen Lösung der Feldgleichungen sowie die Bewegungsgleichungen eines elektrisch geladenen Probeteilchens in diesem Feld und ihre Integralen haben die von der allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagte Form.

7. Die neue Naturkonstante der vorliegenden Theorie stellt die Kopplungskonstante  $d$  zwischen dem Gravitations- und elektromagnetischen Anteil

des unitären Feldes dar. Für  $d = 0$  geht die Theorie in die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell über. Das unitäre Feld zerfällt dann in das Gravitations- und in das elektromagnetische Feld.

8. Da die vorliegende Theorie drei Naturkonstanten, die Gravitationskonstante, die Lichtgeschwindigkeit und die erwähnte Kopplungskonstante enthält, so ist es möglich geworden, ein Fundamentalsystem von Einheiten zu bilden, in dem alle physikalischen Größen mit dimensionslosen Zahlen gemessen werden.

9. Es wurde eine neue Hypothese aufgestellt, nach der die Existenz der elementaren elektrischen Ladung mit der Kopplungskonstante der vorliegenden Theorie am engsten verbunden ist. Nach dieser Hypothese hat der diskontinuierliche Charakter der elektrischen Ladung zur Folge, daß die allgemeine Relativitätstheorie von Einstein-Maxwell durch die vorliegende unitäre Theorie zu ersetzen ist.

Prag, Physikalisches Institut der TH.

Bei der Redaktion eingegangen am 28. April 1959.

Da  
Temp  
zum I  
federn

In  
Korpu  
über d  
lung v  
vorgere  
Fließg  
dagege  
nachge  
samme  
und L  
„I.  
von V  
II.  
Dämpf  
Rei  
sie wir  
wegen  
Defekt  
Energie  
Vorrech  
Übe  
Metalle  
L. I  
halten

<sup>1)</sup> E  
<sup>2)</sup> E  
<sup>3)</sup> K  
<sup>4)</sup> L



# **Der Einfluß von Ultraschall auf das Kriechen von Kupferfedern**

Von Roland Siegel

Mit 3 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Das Kriechen von Metallen wird durch Änderung der Belastung und der Temperatur sowie durch Korpuskularbestrahlung beeinflusst. Untersuchungen zum Einfluß von Ultraschall auf das Kriechen von zylindrischen Schraubenfedern aus Kupfer zeigen eine Aktivierung des Vorganges.

### **1. Einführung**

In den letzten Jahren wurde in zunehmendem Maße der Einfluß von Korpuskularstrahlen auf die Eigenschaften von Werkstoffen untersucht. Auch über die Änderung von Festigkeit und Duktilität der Metalle infolge Bestrahlung wurden zahlreiche Arbeiten veröffentlicht. Andrade<sup>1)</sup> fand für gering vorgereckte Kadmiumkristalle bei Beschuß mit  $\alpha$ -Teilchen eine Erhöhung der Fließgeschwindigkeit. Nach Versuchen von Schmid und Lintner<sup>2)</sup> dagegen zeigten Zinkkristalle nach dem Beschuß Verfestigung. Es konnte nachgewiesen werden, daß  $\alpha$ -Teilchen Frenkel-Defekte erzeugen. In Zusammenfassung umfangreicher Untersuchungsergebnisse schreiben Schmid und Lintner:

„I. Die durch  $\alpha$ -Bestrahlung gebildeten Defekte erschweren das Durchlaufen von Versetzungen; sie wirken also verfestigend.

II. Bei vorher schon „festen“ Metallen werden die Gitterwellen durch Dämpfung in thermische Energie umgewandelt, es tritt Entfestigung ein.“

Rein erscheinungsmäßig wirken  $\beta$ -Strahlen gerade entgegengesetzt, d. h. sie wirken entfestigend und fördern die Fließfrendigkeit, da die Elektronen wegen ihrer kleineren Masse als die  $\alpha$ -Partikel weniger geeignet sind, Frenkel-Defekte zu erzeugen. Aber die Elektronen sind in der Lage, die geringen Energiebeträge auf Gitteratome zu übertragen, die zur Beseitigung der durch Vorreckung entstandenen Gitterstörungen notwendig sind.

Über den Einfluß von Ultraschall auf das Formänderungsvermögen von Metallen ist dagegen wenig mitgeteilt worden.

L. Bergmann<sup>4)</sup> berichtet darüber, daß Ultraschall das magnetische Verhalten von Nickel beeinflusst und die Ummagnetisierung erleichtert. Die allo-

<sup>1)</sup> E. N. da C. Andrade, Ref. bei 2.

<sup>2)</sup> E. Schmid u. K. Lintner, Z. Metallkde 46, 71 (1955).

<sup>3)</sup> K. Lintner u. E. Schmid, Erg. d. exakt. Naturwiss. 28, 302–406 (1955).

<sup>4)</sup> L. Bergmann, „Der Ultraschall“. Hirzel-Verlag Stuttgart 1954, S. 856–865.

tropen Umwandlungen von Metallen gehen ebenfalls schneller vor sich. Das ließ alles erwarten, daß auch Verformungsvorgänge unter dem Einfluß des Ultraschalls leichter vonstatten gehen.

W. Späth<sup>5)</sup> hat sich mit dem Gleiten der Metalle und dem Einfluß von Ultraschall befaßt. Er weist besonders auf eine Erscheinung hin, die sonst kaum Beachtung findet: die Regelmäßigkeit der Gleitlinienabstände. Dafür schlägt er zwei Mechanismen vor:

1. An Gitterbaufehlern kann bei hoher Belastung das Gitter zusammenbrechen und Ultraschallschwingungen auslösen, die in ihrer Regelmäßigkeit auch die Gleitlinienbildung bestimmen.

2. Beim Abgleiten zweier Ebenen treten Reibschwingungen auf, die von sehr hoher (U.-Schall-) Frequenz sind.

Es ist nämlich interessant, daß zwischen Schallgeschwindigkeit und Gleitlamellendicke für verschiedene Metalle ein lineares Verhältnis entsteht.

F. Blaha und B. Langenecker<sup>7)</sup> haben Zinkkristalle unter Ultraschalleinwirkung gedehnt. Sie benutzten dazu eine Polanyi-Apparatur und dehnten die Kristalldrähte bis zu 3%. Der Ultraschall wurde periodisch eingeschaltet und gab eine deutliche Beschleunigung des Abgleitens.

Da der Einfluß von Temperatur, Belastung und Korpuskularstrahlung auf das Kriechen von Metallen schon eingehend untersucht worden ist, schien es wünschenswert, auch die Wirkung von Ultraschall zu studieren.

## 2. Versuchsanordnung

In etwas abgewandelter Form wurde eine bereits mehrfach beschriebene Versuchsanordnung<sup>8)</sup> benutzt, die im wesentlichen aus einer Analysenwaage besteht (Abb. 1). Am linken Arm der Analysenwaage wurde die Probe senkrecht befestigt. Sie tauchte in ein Wasserbad und wurde an ihrem unteren

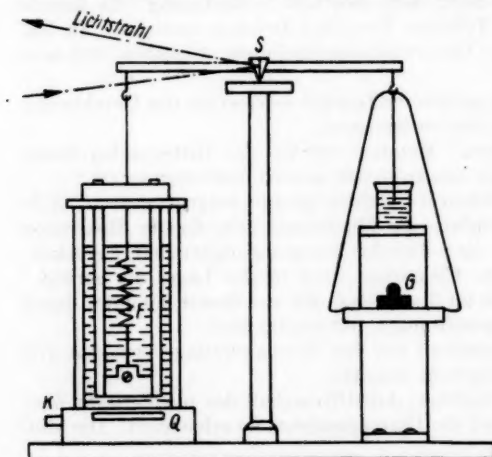


Abb. 1. Versuchsanordnung. *K* Kühlwasseranschluß, *Q* Schwingquarz; *F* Schraubenfeder; *S* Spiegel; *G* Belastungsgewicht

Ende durch eine Klemm-  
vorrichtung im Schalltopf  
festgehalten. Der Schall-  
topf besteht aus einem  
doppelwandigen Glasgefäß  
(zwecks Wasserkühlung),  
im Boden befindet sich der  
Schwingquarz. Das Gefäß  
wurde stets so weit mit

<sup>5)</sup> W. Späth, „Fließen und Kriechen der Metalle“, Metall-Verlag 1955, Berlin-Grünwald.

<sup>6)</sup> W. Späth, Z. Metall 10, 910 (1956).

<sup>7)</sup> F. Blaha u. B. Langenecker, Z. Naturwiss. 42, 556 (1955); Acta Met. 7, 93 (1959).

<sup>8)</sup> G. Müller u. W. Engelhardt, Ann. Physik (6) 9, 367 (1951).

<sup>9)</sup> D. Kuhlmann u. G. Masing, Z. Metallkde 39, 361 (1948).

Wasser als Koppelmedium gefüllt, daß die Feder bedeckt war. Die Belastung erfolgte durch Auflegen von Gewichten auf die rechte Waagschale. Hierbei entstanden kurzfristige elastische Schwingungen, die durch eine Öldämpfung ausgeglichen wurden. Im Drehpunkt der Waage war ein Spiegel befestigt. Auf diesen wurde ein heller Lichtspalt geleitet, der am Drehpunktspiegel auf einen etwa 8 m entfernten Spiegel reflektiert wurde. Von dort aus wurde er auf eine neben der Analysenwaage stehende Skala zurückgeworfen. Durch diese Anordnung war es möglich, kleinste Längungen der Probe nach erfolgter Belastung mit einer Genauigkeit von 0,5 mm an der Skala abzulesen.

### 3. Versuchsmaterial

Als Versuchsmaterial wurde Kupferdraht von 0,8 mm Durchmesser mit einem Reingehalt von 99,998% Kupfer und einer Bruchfestigkeit von 47,3 kp/mm<sup>2</sup> gewählt ( $\delta = 2,5\%$ ). Die Proben erhielten die Form zylindrischer Schraubenfedern mit einem Windungsradius von 7,5 mm. Zu diesem Zweck wurde auf der Drehbank eine lange Feder gewickelt, aus der die einzelnen Proben mit je 12 Windungen angefertigt werden konnten. Danach erfolgte eine 2stündige Glühung bei 120 °C, um die bei der Probenherstellung hervorgerufenen Spannungen auszugleichen. Um grobe Streuungen von vornherein auszugleichen, wurde für die Hauptversuchsreihe nur eine Feder verwendet, die nach erfolgter Beanspruchung jeweils eine halbe Stunde bei 80 °C getempert wurde, um den gleichen Ausgangszustand wiederherzustellen<sup>9)</sup>.

### 4. Versuchsdurchführung und Ergebnisse

Durch Entarretieren der Waage wurde die Probe belastet. Da der Lichtspalt unmittelbar nach der Belastung stark pendelte, war eine sichere Ablesung in den ersten Sekunden nicht möglich. Die Schwingungen klangen jedoch durch die am rechten Waagenarm angebrachte Öldämpfung so rasch ab, daß die erste Ablesung der nun schon „kriechenden“ Dehnung nach 10 Sekunden mit befriedigender Genauigkeit erfolgen konnte. Während des Kriechens wurden die Skalenwerte in bestimmten Zeitabständen abgelesen. Die Versuchsdauer betrug in jedem Fall 15 Minuten.

Infolge der hohen Schallintensität des Ultraschallgerätes — die maximale Schalleistung betrug bei einer Frequenz von 0,8 MHz etwa 35 Watt — war trotz ununter-

brochener Wasserkühlung während der Versuchsdauer von 15 Minuten eine geringe Erhöhung der Wassertemperatur im Schalltopf zu erwarten. Da der Temperatureinfluß auf das Kriechen in gleicher Richtung liegt,

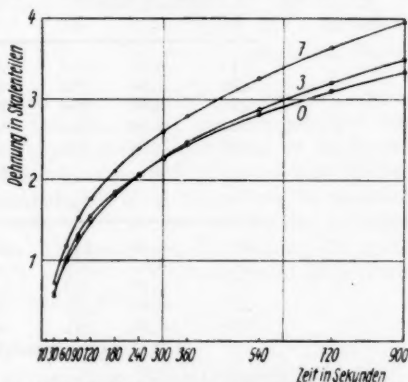


Abb. 2. Kriechkurve einer Kupferfeder bis 5 g Belastung, ohne und mit Ultraschall der Leistungsstufen 3 und 7

wie eine Begünstigung durch Ultraschall, wurden eingehende Voruntersuchungen zu dieser Frage angestellt. Während einer Zeitdauer von 15 Minuten wurde die Temperaturerhöhung für jede der sieben Leistungsstufen mit einem Quecksilberthermometer gemessen. Die maximale Temperaturerhöhung bei der höchsten Leistungsstufe betrug  $2,6^{\circ}\text{C}$ . Nun war zu erwarten, daß durch Einbringen der Haltevorrichtung ein Teil der durch den Ultraschall erzeugten Wärme von dieser aufgenommen wird, so daß die Temperaturerhöhung sicher weniger als  $2,6^{\circ}$  betrug. Um diese Frage zu klären, seien die Versuchsergebnisse schon vorausgenommen und mit Untersuchungen von G. Müller<sup>8)</sup> über den Temperatureinfluß auf das Kriechen zylindrischer Schraubenfedern aus Kupfer verglichen. Danach war für eine Erhöhung der Temperatur um  $2,6^{\circ}\text{C}$  der Gesamtbetrag der kriechenden Dehnung nach 15 Minuten um 30 Einheiten angestiegen. Für einen analogen Versuch mit Ultraschall ergab sich aus unseren Versuchen ein doppelt so großer Gesamtbetrag für die kriechende Dehnung.

In der Tabelle sind die Werte für die Gesamtdehnung  $\gamma$  zwischen 10 und 900 Sekunden für jeden Einzelversuch zusammengestellt. Die Abb. 2 und 3 zeigen die entsprechenden Kriechkurven. Die eingezeichneten Kurvenpunkte sind Mittelwerte aus je 5 Versuchen.

Analoge Versuche an Silber zeigten das gleiche Ergebnis.

Tabelle  
Jeder Wert stellt den Betrag der Dehnung zwischen  
10 und 900 Sekunden eines Einzelversuches dar

5 g Belastung					
Ohne Ultraschall		Stufe 3		Stufe 7	
Nr.	$\gamma$	Nr.	$\gamma$	Nr.	$\gamma$
214	3,70	216	3,55	218	3,95
220	2,90	222	3,45	224	3,75
226	3,60	228	3,20	230	3,75
232	3,20	234	3,70	236	4,30
238	3,25	240	3,50	242	4,00
$\bar{\gamma} = 3,33$		$\bar{\gamma} = 3,48$		$\bar{\gamma} = 3,95$	
9 g Belastung					
215	6,45	217	6,25	219	6,85
221	6,65	233	6,80	225	7,15
227	5,70	229	6,90	231	7,05
233	6,00	235	6,95	237	7,35
239	6,35	241	6,85	243	7,25
$\bar{\gamma} = 6,22$		$\bar{\gamma} = 6,75$		$\bar{\gamma} = 7,13$	

### 5. Schlußfolgerungen

Aus den vorliegenden Versuchen ist ganz allgemein ersichtlich, daß Ultraschall das Kriechen von Metallen aktiviert. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die vom Ultraschall gleichzeitig bewirkte Temperaturerhöhung des ganzen Systems schon das Kriechen beschleunigt. Eingehende Betrachtungen über

Größe und Wirkung der Temperaturerhöhung zeigen aber, daß die Aktivierung nicht allein darauf zurückzuführen ist, sondern daß ebenso eine „rein mechanische Wirkung“ vorhanden ist. Nun ist es, betrachtet man das Problem vom theoretischen Standpunkt, ungünstig, daß der Ultraschalleinfluß nicht allein erfaßt werden kann. Aber andererseits wird für den Techniker die Ultraschallwirkung stets eine komplexe Größe sein.

Es sei hier darauf verwiesen, daß beim Bau von Strahltriebwerken bereits die Frage „Ultraschall und Werkstoff“ diskutiert wird<sup>10)</sup>.

F. Blaha und B. Langenecker<sup>7)</sup> haben, auch wenn die Versuchsbedingungen nicht ohne weiteres vergleichbar sind, jedenfalls eine stärkere Beschleunigung des Abgleitens bei Verformung unter Ultraschall messen können, als es bei den vorliegenden Versuchen der Fall war. Bei einer Begründung der unterschiedlichen Ergebnisse kann man sich auf W. Späth, F. Blaha und B. Langenecker stützen. W. Späth<sup>8)</sup> hat auf den engen Zusammenhang zwischen Schallgeschwindigkeit und Gleitlamellendicke hingewiesen. Faßt man das Kriechen als einen Vorgang auf, der vorwiegend aus Atom-Platzwechsel-

vorgängen an dafür prädestinierten „Störstellen“ — nämlich Mosaikblockgrenzen und Korngrenzen — besteht, so ist eine ausgeprägte Gleitlamellenbildung erst bei stärkerer plastischer Verformung zu beobachten. Damit soll kein qualitativer Unterschied zwischen Kriechen und Fließen<sup>11)</sup> gemacht werden. Das Kriechen wird lediglich als Anfangsstufe der plastischen Verformung betrachtet und auf mehr oder weniger zahlreiche Atomplatzwechsel zurückgeführt, während bei der plastischen Umformung der gesamte Werkstoff dem Zwang ausweicht, alle möglichen Gleitebenen in Aktion treten und gegebenenfalls auch Zwillingsbildung eintritt.

## 6. Zusammenfassung

Nach einem Überblick über verschiedene Einflußmöglichkeiten auf das Kriechen von Metallen wird die Beeinflussung verschiedener Werkstoffeigenschaften durch Ultraschall kurz beschrieben.

<sup>10)</sup> F. Staab, Phys. Blätter 8, 355 (1958).

<sup>11)</sup> Unter Kriechen sei die zeitabhängige plastische Formänderung bei Belastung unter der Elastizitätsgrenze verstanden, mit Fließen ist der Werkstofffluß bei Belastung im plastischen Bereich gemeint.

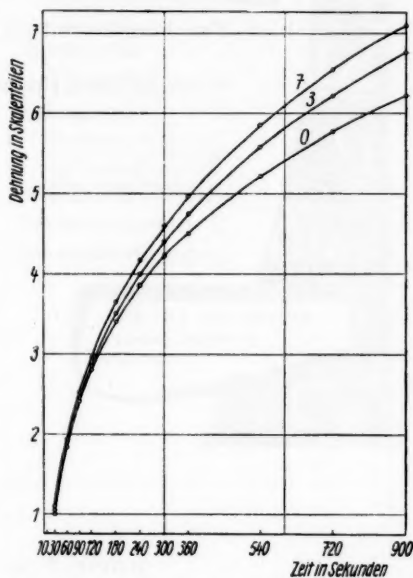


Abb. 3. Wie Abb. 2, jedoch 9 g Belastung

Versuche an zylindrischen Schraubenfedern aus Kupfer wurden mit und zum Vergleich auch ohne Ultraschall durchgeführt. Die Aktivierung des Kriechens wird teilweise auf die gleichzeitige Erwärmung, aber vor allem auf die mechanische Wirkung zurückgeführt. Die Meßergebnisse werden im Vergleich mit denen von F. Blaha und B. Langenecker diskutiert.

Zwickau, Forschungsinstitut für bildsame Formung der Metalle.

Bei der Redaktion eingegangen am 21. Mai 1959.

---

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigenteil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 78 51. Z. Z. gilt Anzeigenpreislste 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 27 681, 27 682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 209/59

Grö

Von

Te

X  
I

„Ze  
schu  
sicher  
Weg  
trock  
übera  
math  
Es be  
se de  
gen, c  
auf l  
Werk

JO

XI,

Die  
verä  
heit  
gefa  
sowi  
aufn  
Ch e  
phys  
Weg  
misc  
Les  
nur  
stell  
aufz

JO

## Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen

Von Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. e. h.  
**JULIUS WALLOT**

Honorarprofessor an der  
Technischen Hochschule Karlsruhe

2., verbesserte Auflage

XII, 220 Seiten. 1957. Gr. 8°.

DM 14.70, Leinen DM 16.35

„Zeitschrift für Naturforschung“; „Das Buch ist nicht nur ein sicherer, sondern auch ein angenehmer Wegweiser durch das behandelte, oft als trocken verschriene Gebiet, denn es ist überaus anregend und ohne Aufwand an mathematischen Methoden geschrieben. Es beendet zudem in überzeugender Weise den Meinungsstreit über so viele Fragen, daß es aller Wahrscheinlichkeit nach auf lange Zeit hinaus das grundlegende Werk auf seinem Gebiet sein wird.“

Johannes Fischer (Karlsruhe)

**JOHANN AMBROSIOUS BARTH**  
VERLAG / LEIPZIG

## Kalorimeter

nach Berthelot-  
Mahler-Köcker  
für die Heizwert-  
bestimmung fester  
und flüssiger  
Brennstoffe.

## Ölprüfgeräte

Viskosimeter,  
Flammpunktprüfer.

## Laborgeräte

Destillationsapparate,  
Apparate zur Bestimmung  
des Erweichungs- bzw.  
Erstarrungspunktes,  
Wasser- und Sandbäder.

## Fraktionssammler

## Sonderanfertigungen

**VEB (K) Apparatebau**  
Potsdam-Babelsberg  
Fultonstr. 3

*In neuer Auflage liegt vor:*

## Theoretische Chemie

Eine Einführung vom Standpunkt einer gestalthaften Atomlehre

- Von Prof. Dr. K. LOTHAR WOLF, Kirchheimbolanden

4., umgearbeitete Auflage

XI, 813 Seiten mit 347 Abb. im Text. 1959. Gr. 8°. DM 39.50, Ln. DM 41.50

Die die Gestaltung des Werkes bestimmenden Richtlinien sind in der neuen Auflage unverändert geblieben, dagegen wurden in der Anordnung des Stoffes sowie in vielen Einzelheiten Änderungen, Erweiterungen und Verbesserungen vorgenommen. Auf eine zusammengefaßte Darstellung der Methoden der Gruppentheorie und der Symmetriebetrachtung sowie auf eine durchgehend stärkere Berücksichtigung von Symmetriefragen sei besonders aufmerksam gemacht.

Chemiker-Zeitung: Das Werk, das sich bereits jetzt einen festen Platz in der physikalisch-chemischen Literatur erobert hat, schreitet weiter auf seinem eigenwilligen Weg, der bewußt ein anderer ist als der, den die „theoretische Chemie thermodynamischer Prägung“ geht. Das Werk bietet handfeste physikalische Chemie, und der Leser — auch Anfängern kann es empfohlen werden —, der es durcharbeitet, lernt nicht nur viel theoretisch-chemischen Stoff, sondern er darf auch die Freude an einer Darstellungsweise genießen, die ihm den Standort der Einzelscheinungen besonders klar aufzeigt. Dem Werk ist eine weite Verbreitung zu wünschen.

Sch.

**JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**



## aus den Frontgebieten der Physik

Auf den Jahrestagungen des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften sind die zusammenfassenden Hauptvorträge über aktuelle Fachgebiete besonders beliebt. Sie vermitteln allen Teilnehmern einen direkten Einblick in die Entwicklung von Spezialgebieten und tragen nicht unerheblich dazu bei, den Zusammenhang zwischen den einzelnen Fachrichtungen innerhalb der Physik zu wahren. Diese Jahrbücher sind jedem Naturwissenschaftler, der Wert darauf legt, den Fortschritt auch außerhalb seines engen Spezialgebietes zu verfolgen, zu empfehlen.

### Sonderangebot

Alle 5 Bände in Kassette zum Ausnahmepreis von DM 50,—

- 1 Physikertag Innsbruck. Herausgegeben von H. Auer, E. Brüche und R. Steinmaurer  
Band 1 der Reihe Tagungsbücher des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften, 138 S., 87 Abb., 1954, Gln. DM 19,80, 8°.
- 2 Physikertag Hamburg. Herausgegeben von E. Bagge und E. Brüche  
Band 2 der Reihe Tagungsbücher des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften, 205 S., 122 Abb., 12 Tab. 1955, Gln. DM 24,—, 8°.
- 3 Physikertag Wiesbaden. Herausgegeben von E. Brüche, G. Schubert und L. Waldmann  
Band 3 der Reihe Tagungsbücher des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften, 150 S., 78 Abb., 5 Tab., 1956, Gln. DM 19,20, 8°.
- 4 Physikertag München. Herausgegeben von H. Auer und E. Brüche  
Band 4 der Reihe Tagungsbücher des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften, 225 S., 169 Abb., 14 Tab. 1957, Gln. DM 28,—, 8°.
- 5 Physikertag Heidelberg. Herausgegeben von E. Brüche und W. Wessel  
Band 5 der Reihe Tagungsbücher des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften, 188 S., 91 Abb., 8 Tab. 1958, Gln. DM 28,—, 8°.

Inhaltsverzeichnis der Bände 1—5 auf Anfrage

In der Deutschen Demokratischen Republik beziehbar im Rahmen des Kontingents

**PHYSIK VERLAG · MOSBACH/Bd.**

stell-  
ge-  
ten  
ier-  
sch-  
tem  
alb

nd

ner

he

ner

ert

ner

er

el

er

es